JOURNAL
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

Sur le Nombre des Valeurs qu'une Fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme;

PAR A. L. CAUCHY, INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES.

MM. *Lagrange* et *Vandermonde* sont, je crois, les premiers qui aient considéré les fonctions de plusieurs variables relativement au nombre de valeurs qu'elles peuvent obtenir, lorsqu'on substitue ces variables à la place les unes des autres. Ils ont donné plusieurs théorèmes intéressans relatifs à ce sujet, dans deux mémoires imprimés en 1771, l'un à Berlin, l'autre à Paris. Depuis ce temps, quelques géomètres italiens se sont occupés avec succès de cette matière, et particulièrement M. *Ruffini*, qui a consigné le résultat de ses recherches dans le tome XII des Mémoires de la Société italienne, et dans sa Théorie des équations numériques. Une des conséquences les plus remarquables des travaux de ces divers géomètres, est qu'avec un nombre donné de lettres on ne peut pas toujours former une fonction qui ait un nombre déterminé de valeurs. Les caractères par lesquels cette impossibilité se manifeste, ne sont pas toujours faciles à saisir; mais on peut du moins, pour un nombre donné de lettres, assigner des limites que le nombre des valeurs ne peut dépasser, et déterminer en outre un grand nombre de cas d'exclusion. Je vais exposer dans ce mémoire ce qu'on avait déjà trouvé de plus important sur cet objet, et ce que mes propres recherches m'ont permis d'y ajouter. J'examinerai plus particulièrement le cas où le nombre des valeurs d'une fonction est supposé plus petit que le nombre des lettres, parce que les fonctions de cette nature sont celles dont la connaissance est la plus utile en analyse.

CONSIDÉRONS une fonction de plusieurs quantités, et supposons que l'on échange entre elles ces mêmes quantités une ou plusieurs fois de suite. Si la fonction est du genre de celles qu'on appelle *symétriques*, elle ne changera pas de valeur par suite des transpositions opérées entre les quantités qu'elle renferme; mais si elle n'est pas symétrique, elle pourra obtenir, en vertu de ces mêmes transpositions, plusieurs valeurs différentes les unes des autres, dont le nombre se trouvera déterminé par la nature de la fonction dont il s'agit. Si l'on partage les fonctions en divers ordres, suivant le nombre des quantités qu'elles renferment, en sorte qu'une fonction du second ordre soit celle qui renferme deux quantités, une fonction du troisième ordre celle qui en renferme trois, &c...., il sera facile de reconnaître qu'il existe une liaison nécessaire entre le nombre des valeurs que peut obtenir une fonction non symétrique et l'ordre de cette même fonction. Ainsi, par exemple, une fonction du second ordre ne pourra jamais obtenir que deux valeurs que l'on déduira l'une de l'autre par la transposition des deux quantités qui la composent. De même, une fonction du troisième ordre ne pourra obtenir plus de six valeurs; une fonction du quatrième ordre plus de vingt-quatre valeurs, &c.... En général, le *maximum* du nombre des valeurs que peut obtenir une fonction de l'ordre n sera évidemment égal au produit

$$1 . 2 . 3 \ldots n;$$

car ce produit représente le nombre des manières différentes dont on peut disposer à la suite les unes des autres, les quantités dont la fonction se compose. On a donc déjà, par ce moyen, une limite que le nombre des valeurs en question ne peut dépasser : mais il s'en faut de beaucoup que dans chaque ordre on puisse former des fonctions dont le nombre des valeurs soit égal à l'un des nombres entiers situés au-dessous de cette limite. Un peu de réflexion suffit pour faire voir qu'aucun nombre au-dessous de la limite ne peut remplir la condition exigée, à moins qu'il ne soit diviseur de cette limite. On peut s'en assurer facilement à l'aide des considérations suivantes.

Soit K une fonction quelconque de l'ordre n, et désignons par a_1, $a_2 \ldots a_n$ les quantités qu'elle renferme. Si l'on écrit à la suite les unes des autres les quantités dont il s'agit, ou, ce qui revient au même, les indices qui les affectent, dans l'ordre où ils se présentent, lorsqu'on les passe en revue en allant de gauche à droite, et en ayant soin de n'écrire qu'une seule fois chaque indice, on aura une permutation de ces mêmes indices, qui aura une relation nécessaire avec la fonction K. Par exemple, si la fonction K était du quatrième ordre, et égale à

$$a_1\ a_2^m \cos. a_4 + a_4 \sin. a_3,$$

la permutation relative à K serait

$$1 . 2 . 4 . 3.$$

Si, au-dessous de la permutation relative à K, on écrit une autre permutation formée avec les indices $1, 2, 3 \ldots n$, et que l'on remplace successivement dans la fonction K, chacun des indices qui composent la permutation supérieure par l'indice correspondant de la permutation inférieure, on aura une nouvelle valeur de K qui sera ou ne sera pas équivalente à la première, et la permutation relative à cette nouvelle valeur de K sera évidemment la permutation inférieure dont on vient de parler. On pourra obtenir, par ce moyen, les valeurs de K relatives aux diverses permutations que l'on peut former avec les indices $1, 2, 3 \ldots n$; et si l'on représente par

$$K, K', K'', \&c. \ldots$$

les valeurs dont il s'agit, leur nombre sera égal au produit

$$1 . 2 . 3 \ldots n,$$

et leur ensemble fournira toutes les valeurs possibles de la fonction K. Pour déduire deux de ces valeurs l'une de l'autre, il suffira de former les permutations relatives à ces deux valeurs, et de substituer aux indices de la première permutation les indices correspondans pris dans la seconde. Pour indiquer cette *substitution*, j'écrirai les deux permutations entre parenthèses, en plaçant la première au-dessus de la seconde : ainsi, par exemple, la substitution

$$\begin{pmatrix} 1.2.4.3 \\ 2.4.3.1 \end{pmatrix}$$

indiquera que l'on doit substituer dans K, l'indice 2 à l'indice 1, l'indice 4 à l'indice 2, l'indice 3 à l'indice 4, et l'indice 1 à l'indice 3. Si donc on supposait, comme ci-dessus,

$$K = a_1 \, a_2^m \cos. a_4 + a_4 \sin. a_3,$$

en désignant par K' la nouvelle valeur de K obtenue par la substitution

$$\begin{pmatrix} 1.2.4.3 \\ 2.4.3.1 \end{pmatrix},$$

on aurait

$$K' = a_2 \, a_4^m \cos. a_3 + a_3 \sin. a_1.$$

Afin d'abréger, je représenterai dans la suite les permutations elles-mêmes par des lettres majuscules. Ainsi, si l'on désigne la permutation

$$1.2.4.3 \quad \text{par} \quad A_1,$$

et la permutation

$$2.4.3.1 \quad \text{par} \quad A_2,$$

la substitution

$$\begin{pmatrix} 1.2.4.3 \\ 2.4.3.1 \end{pmatrix}$$

se trouvera indiquée de la manière suivante,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Cela posé, K étant une fonction quelconque de l'ordre n, désignons par N le produit $1.2.3\ldots n$, et par

$$A_1, \; A_2, \; A_3 \ldots\ldots A_N,$$

les diverses permutations en nombre égal à N que l'on peut former avec les indices $1, 2, 3\ldots n$, N sera le nombre total des valeurs de la fonction K relatives à ces diverses permutations. Soient

$$K_1, \; K_2, \; K_3 \ldots\ldots K_N$$

ces mêmes valeurs. Si elles sont toutes différentes les unes des autres, N exprimera le nombre des valeurs différentes de la fonction donnée; mais dans le cas contraire, le nombre de ces valeurs étant plus petit que N, sera nécessairement un diviseur de N, comme on va le faire voir.

Supposons que, parmi les valeurs possibles

$$K_1, \; K_2, \; K_3 \ldots\ldots K_N$$

de la fonction donnée, plusieurs deviennent égales entre elles, en sorte qu'on ait, par exemple,

$$K_\alpha = K_\beta = K_\gamma = \&c.\ldots$$

Désignons par M le nombre total des valeurs K_α, K_β, K_γ, &c.... que l'on suppose ici égales entre elles. Les permutations relatives à ces valeurs, ou A_α, A_β, A_γ, &c..., seront aussi en nombre égal à M. Pour déduire toutes ces permutations d'une seule, par exemple, de A_α, il suffira d'échanger entre eux, d'une certaine manière, les indices qui, dans cette permutation, occupent certaines places; et l'on conçoit facilement que si ces changemens n'altèrent en rien la valeur correspondante K_α de la fonction K, cela tient non pas à la valeur même des indices, mais à la place que chacun d'eux occupe dans la permutation dont il s'agit.

Cela posé, soit K_λ une nouvelle valeur de K, qui ne soit pas égale à K_α: et désignons toujours par A_λ la permutation relative à K_λ. Si l'on fait subir simultanément aux indices qui occupent les mêmes places dans les permutations A_α et A_λ les changemens dont on vient de parler, la seconde permutation A_λ se trouvera successivement changée en plusieurs autres A_μ, A_ν, &c...., pendant que la première A_α deviendra successivement A_β, A_γ, &c.... ; et d'après le principe énoncé ci-dessus, il est évident que l'équation

$$K_\alpha = K_\beta = K_\gamma = \&c....,$$

entraînera celle-ci,

$$K_\lambda = K_\mu = K_\nu = \&c....$$

Il est aisé d'en conclure que, parmi les valeurs de K relatives à toutes les permutations possibles, savoir,

$$K_1, \ K_2, \ K_3 \ldots\ldots K_N,$$

le nombre de celles qui seront équivalentes à K_λ, sera le même que le nombre des valeurs équivalentes à K_α. Par suite, si l'on représente par R le nombre total des valeurs essentiellement différentes de la fonction K, M étant le nombre des valeurs équivalentes à K_α, RM sera le nombre total des valeurs relatives aux diverses permutations. On aura donc $RM = N$, et par suite

$$R = \frac{N}{M}.$$

Ainsi R, ou le nombre des valeurs différentes de la fonction K ne peut être qu'un diviseur de N, c'est-à-dire, du produit $1.2.3\ldots n$. Ce théorème, qui se présente dès les premiers pas que l'on veut faire dans la théorie des combinaisons, était déjà connu; mais il était nécessaire de le rappeler ici pour l'intelligence de ce qui va suivre. Afin d'abréger, j'appellerai désormais *indice* de la fonction K, le nombre R qui indique combien cette fonction peut obtenir de valeurs essentiellement différentes, et j'appellerai *diviseur indicatif* le nombre M par lequel on doit diviser N, ou le produit des indices $1, 2, 3 \ldots n$ renfermés dans la fonction, pour obtenir l'indice de la fonction elle-même.

On vient de voir que le nombre des valeurs différentes d'une fonction de l'ordre n, est nécessairement un diviseur du produit,

$$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n.$$

Le plus petit diviseur de ce produit est toujours égal à 2, et il est facile de s'assurer que dans un ordre quelconque on peut former des fonctions qui n'aient que deux valeurs différentes. *Vandermonde* a donné les moyens de composer des fonctions de cette espèce. En général, pour former avec les quantités

$$a_1, \; a_2 \ldots a_n$$

une fonction de l'ordre n, dont l'indice soit égal à 2, il suffira de considérer la partie positive ou la partie négative du produit

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_n)(a_2 - a_3) \ldots (a_2 - a_n) \ldots\ldots (a_{n-1} - a_n),$$

qui a pour facteurs les différences des quantités a_1; $a_2 \ldots a_n$ prises deux à deux.

En effet, supposons qu'après avoir développé ce produit, on représente par P la somme des termes positifs, et par Q la somme des termes négatifs, le produit dont il s'agit sera représenté par

$$P - Q;$$

et comme ce produit ne peut jamais changer de valeur, mais seulement de signe, en vertu de substitutions quelconques opérées entre les indices des quantités qu'il renferme, les substitutions dont il s'agit pourront seulement transformer $P - Q$ en $Q - P$, c'est-à-dire, changer P en Q, et réciproquement. P et Q seront donc les deux valeurs d'une fonction qui ne pourra en obtenir d'autres. En supposant

$n=3$; on trouve

$$P = a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + a_3^2 a_1,$$
$$Q = a_1 a_2^2 + a_2 a_3^2 + a_3 a_1^2.$$

On serait encore arrivé à de semblables conclusions, si l'on eût multiplié le produit

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)\ldots\ldots(a_{n-1}-a_n),$$

par une fonction symétrique quelconque des quantités

$$a_1,\ a_2\ldots\ldots a_n.$$

Ce qu'on vient de remarquer relativement au diviseur 2 du produit $1.2.3\ldots n$, n'est pas vrai en général relativement à l'un quelconque des diviseurs de ce produit, et il n'est pas toujours possible de former une fonction de l'ordre n, dont les valeurs différentes soient en nombre égal à l'un de ces diviseurs pris à volonté. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de former une fonction K qui ait seulement trois valeurs différentes. Si n est égal à 3, on trouvera une infinité de fonctions qui rempliront la condition exigée, telles que

$$a_1 a_2 + a_3,$$
$$a_1 (a_2 + a_3),$$
&c.....

On pourra encore former des fonctions de cette espèce, si n est égal à 4, par exemple,

$$a_1 a_2 + a_3 a_4,$$
$$(a_1 + a_2)(a_3 + a_4),$$
&c....

Mais si n est égal à 5, ou surpasse 5, on n'en pourra plus former de semblables : on ne peut pas même, dans ce cas, former de fonctions qui n'aient que quatre valeurs. Ces deux propositions ont été démontrées par M. *Paolo Ruffini*, dans les Mémoires de la Société italienne tome XII, et dans sa Théorie des équations. Ayant été conduit par des

des recherches sur les nombres, à m'occuper de la théorie des combinaisons, je suis arrivé à la démonstration d'un théorème plus général qui renferme les deux précédens, et qui détermine une limite au-dessous de laquelle le nombre des valeurs d'une fonction non symétrique de l'ordre n, ne peut jamais s'abaisser sans devenir égal à 2. Ce théorème peut s'énoncer ainsi qu'il suit :

Le nombre des valeurs différentes d'une fonction non symétrique de n *quantités, ne peut s'abaisser au-dessous du plus grand nombre premier* p *contenu dans* n, *sans devenir égal à 2.*

1.re Partie de la démonstration.

On fait voir que si l'on suppose $R < p$, *chaque valeur de* K *ne pourra être changée par aucune substitution du degré* p.

Comme, pour démontrer le théorème précédent, il est nécessaire de bien connaître la nature de l'opération que j'ai désignée sous le nom de *substitution*, je commencerai par donner sur cet objet de nouveaux développemens.

Soit K la fonction donnée de l'ordre n; soit R son indice ou le nombre des valeurs essentiellement différentes qu'elle peut recevoir par des substitutions opérées entre les quantités dont elle se compose. Enfin désignons par N le produit $1.2.3\ldots n$, R sera nécessairement un diviseur de N que je pourrai représenter par

$$\frac{N}{M},$$

M étant ainsi le diviseur indicatif de la fonction K. Cela posé, soient A_1, $A_2\ldots A_N$ les permutations en nombre égal à N, que l'on peut former avec les indices renfermés dans K, et désignons par

$$K_1,\quad K_2\ \ldots\ K_N$$

les valeurs correspondantes de cette même fonction; pour déduire l'une de l'autre deux de ces valeurs, ou, ce qui revient au même, les permutations qui leur correspondent, par exemple, A_1 et A_2, il suffira de remplacer respectivement les indices compris dans la permutation

A_1, par les indices correspondans compris dans la permutation A_2. Cette opération, que j'appelle substitution, sera, d'après les conventions établies, indiquée de la manière suivante,

$$\binom{A_1}{A_2}.$$

Les deux permutations A_1 et A_2 seront appelées respectivement premier et second terme de cette substitution. On peut dans le premier terme A_1 de cette substitution intervertir, de telle manière que l'on voudra, l'ordre des indices $1, 2, 3 \ldots n$, pourvu que l'on intervertisse de la même manière l'ordre des indices correspondans compris dans le second terme A_2. On pourra, en conséquence, donner successivement pour premier terme à la substitution proposée chacune des permutations $A_1, A_2, A_3 \ldots A_N$, et la mettre ainsi sous un nombre égal à N de formes différentes qui seront toutes équivalentes entre elles.

Je dirai qu'une substitution est le *produit* de plusieurs autres, lorsqu'elle donnera le même résultat que ces dernières opérées successivement. Par exemple, si en appliquant successivement à la permutation A_1 les deux substitutions $\binom{A_2}{A_3}$ et $\binom{A_4}{A_5}$, on obtient pour résultat la permutation A_6; la substitution $\binom{A_1}{A_6}$ sera équivalente au produit des deux autres, et j'indiquerai cette équivalence comme il suit :

$$\binom{A_1}{A_6} = \binom{A_2}{A_3}\binom{A_4}{A_5}.$$

Une substitution *identique* est celle dont les deux termes sont égaux entre eux. Les substitutions

$$\binom{A_1}{A_1},\ \binom{A_2}{A_2} \ldots\ldots \binom{A_N}{A_N}$$

sont toutes identiques.

Je dirai que deux substitutions sont *contiguës*, lorsque le second terme de la première sera égal au premier terme de la seconde. Les deux substitutions contiguës $\binom{A_1}{A_2}$, $\binom{A_2}{A_3}$, opérées successivement, donnent le même résultat que la substitution unique $\binom{A_1}{A_3}$: on a donc

$$\binom{A_1}{A_3} = \binom{A_1}{A_2}\binom{A_2}{A_3}.$$

On a de même, en général,

$$\binom{A_1}{A_r} = \binom{A_1}{A_2}\binom{A_2}{A_3}\binom{A_3}{A_4}\cdots\cdots\binom{A_{r-1}}{A_r}.$$

Enfin, je dirai qu'une substitution est dérivée d'une autre, ou est une *puissance* d'une autre, si elle est équivalente à cette autre répétée plusieurs fois de suite. J'indiquerai la puissance r de la substitution $\binom{A_1}{A_2}$ de la manière suivante,

$$\binom{A_1}{A_2}^r.$$

Lorsque les substitutions contiguës

$$\binom{A_1}{A_2},\ \binom{A_2}{A_3},\ \binom{A_3}{A_4}\cdots\cdots\binom{A_{r-1}}{A_r}$$

sont toutes équivalentes entre elles, on a

$$\binom{A_1}{A_2}^r = \binom{A_1}{A_2}\binom{A_2}{A_3}\binom{A_3}{A_4}\cdots\cdots\binom{A_{r-1}}{A_r} = \binom{A_1}{A_r}.$$

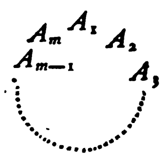
Supposons que l'on applique plusieurs fois de suite à la permutation A_1 la substitution $\binom{A_s}{A_t}$, en sorte que cette substitution étant appliquée à la permutation A_1, donne pour résultat la permutation A_2 ; qu'étant appliquée à la permutation A_2, elle donne pour résultat la permutation A_3, &c...... La série des permutations

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \&c\ldots\ldots$$

sera nécessairement composée d'un nombre fini de termes ; et si l'on représente par m ce même nombre, et par A_m la dernière des permutations obtenues, la substitution $\binom{A_s}{A_t}$ appliquée à cette dernière permutation reproduira de nouveau le terme A_1. Cela posé, si l'on range en cercle, ou plutôt en polygone régulier, les permutations

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3\,\ldots\ldots\,A_{m-1},\quad A_m$$

de la manière suivante,



toutes les substitutions que l'on pourra former avec deux permutations prises à la suite l'une de l'autre et d'orient en occident dans le polygone dont il s'agit, seront équivalentes entre elles et à $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$: et toutes celles que l'on pourra former avec deux permutations séparées l'une de l'autre par un nombre r de côtés dans ce même polygone, seront équivalentes à la puissance r de la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$. On aura de cette manière,

$$\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \&c.\ldots = \begin{pmatrix} A_m \\ A_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix} = \&c.\ldots = \begin{pmatrix} A_m \\ A_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_5 \end{pmatrix} = \&c.\ldots = \begin{pmatrix} A_m \\ A_3 \end{pmatrix},$$

&c......

$$\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \&c.\ldots = \begin{pmatrix} A_m \\ A_m \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^{m+1} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \&c.\ldots = \begin{pmatrix} A_m \\ A_1 \end{pmatrix},$$

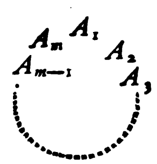
&c......;

Il suit de ces considérations, 1.° que la puissance m de la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ est équivalente à la substitution identique $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix}$; 2.° que x étant un nombre entier quelconque, $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^{mx}$ sera encore une substitution identique; 3.° que, dans la même hypothèse, les substitutions $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^{mx+r}$ et $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^{r}$ sont équivalentes; 4.° que la notation $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^{0}$ indique une substitution identique; 5.° que, parmi les substitutions dérivées de $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$, les seules qui soient différentes entre elles sont les puissances dont l'exposant est plus petit que m, ou, ce qui revient au même, les substitutions équivalentes à ces puissances, savoir;

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix} \ldots\ldots \begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}.$$

Le nombre de ces substitutions est comme celui des permutations A_1, A_2, A_3 ..... A_m égal à m. Ce nombre sera appelé le *degré* de la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$. Si l'on applique plusieurs fois de suite la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ à la permutation A_1, on commencera par obtenir la suite des permutations A_1, A_2, A_3 ..... A_m; et lorsqu'on sera parvenu à ce point, les mêmes permutations se reproduiront dans le même ordre d'une manière périodique. C'est pourquoi je dirai que les permutations précédentes forment une période qui correspond à la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$. Cela posé, le degré d'une substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ indique à-la-fois la plus petite de ses puissances positives qui soit équivalente à une substitution identique, et le nombre des permutations comprises dans la période qui résulte de l'application de la substitution donnée à une permutation déterminée.

La manière la plus simple de représenter une période est de ranger en cercle, ou plutôt en polygone régulier, les permutations qui la composent, ainsi qu'on l'a déjà fait plus haut.

Je dirai que le cercle suivant 

formé, comme on vient de le dire, est un des cercles de permutations qui correspondent à la substitution $\left(\begin{smallmatrix} A_s \\ A_t \end{smallmatrix}\right)$. Toute substitution qui a pour termes deux permutations comprises dans ce cercle est une des puissances de la substitution $\left(\begin{smallmatrix} A_s \\ A_t \end{smallmatrix}\right)$.

Étant donné le cercle ou polygone précédent qui correspond à la substitution $\left(\begin{smallmatrix} A_s \\ A_t \end{smallmatrix}\right)$; pour en déduire un polygone qui corresponde à la substitution $\left(\begin{smallmatrix} A_s \\ A_t \end{smallmatrix}\right)^r$, il suffit de joindre de r en r, en allant d'orient en occident, les sommets du polygone donné, et d'écrire les permutations que l'on y rencontre dans l'ordre où elles se présentent. Lorsque r et m sont premiers entre eux, on passe de cette manière sur tous les sommets du premier polygone, et le second polygone renferme toutes les permutations comprises dans le premier : par suite, la substitution $\left(\begin{smallmatrix} A_s \\ A_t \end{smallmatrix}\right)^r$ est du degré m, ainsi que la substitution donnée $\left(\begin{smallmatrix} A_s \\ A_t \end{smallmatrix}\right)$; et cette seconde substitution peut alors être considérée comme une puissance de l'autre. Cette circonstance a toujours lieu, lorsque m est un nombre premier, quelle que soit d'ailleurs la valeur de r.

Si l'on applique successivement la substitution $\left(\begin{smallmatrix} A_s \\ A_t \end{smallmatrix}\right)$ aux différentes valeurs de la fonction K, ou, ce qui revient au même, aux permutations

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3 \ldots\ldots A_N$$

qui leur correspondent, on obtiendra en tout un nombre égal à $\frac{N}{m}$ de polygones ou cercles différens les uns des autres, qui seront composés chacun de m permutations différentes.

Cela posé, désignons sous le nom de *permutations équivalentes* celles qui correspondent à des valeurs équivalentes de la fonction K; les permutations équivalentes à A_1 étant par hypothèse en nombre égal à M, il est visible que si l'on a $M > \frac{N}{m}$, on pourra, parmi les cercles que l'on vient de former, en trouver au moins un qui renferme deux des permutations équivalentes dont il s'agit. Soient A_x, A_y ces deux permutations : la substitution $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ sera une des puissances de la substitution $\begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix}$; et si en outre m est un nombre premier, $\begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix}$ sera encore une puissance de la substitution $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$. D'ailleurs, les deux permutations A_x, A_y étant équivalentes entre elles et à la permutation A_1, la substitution $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ ne changera pas la valeur K_1 de la fonction K. Par suite, cette même valeur ne sera pas changée par la substitution $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ plusieurs fois répétée ; elle ne sera donc pas changée par la substitution $\begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix}$, si m est un nombre premier. Si l'on représente par p le plus grand des nombres premiers compris dans n, on pourra supposer dans ce qui précède

$$m = p.$$

Nous sommes donc conduits par les considérations précédentes à ce résultat remarquable, que relativement à la fonction K on ne peut supposer $M > \frac{N}{p}$, ou, ce qui revient au même, $R < p$, à moins de supposer en même temps que la valeur K_1 de cette fonction ne peut être changée par aucune des substitutions du degré p. Il nous reste à faire voir que, pour satisfaire à cette dernière condition, on est obligé de rendre la fonction symétrique ou de supposer

$$R = 2.$$

2.[e] Partie de la démonstration.

On fait voir que si une valeur de K *ne peut être changée par aucune substitution du degré* p, *elle ne pourra être changée par aucune des substitutions circulaires du 3.[e] degré.*

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'examiner avec quelque attention la nature des substitutions du degré p, que l'on peut former avec les indices $1, 2, 3 \ldots n$.

Nous observerons d'abord que, si dans la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ formée par deux permutations prises à volonté dans la suite,

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3 \ldots\ldots A_N,$$

les deux termes A_s, A_t renferment des indices correspondans qui soient respectivement égaux, on pourra sans inconvénient supprimer ces mêmes indices, pour ne conserver que ceux des indices correspondans qui sont respectivement inégaux. Ainsi, par exemple, si l'on fait $n = 5$, les deux substitutions

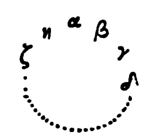
$$\begin{pmatrix} 1.2.3.4.5 \\ 2.3.1.4.5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1.2.3 \\ 2.3.1 \end{pmatrix}$$

seront équivalentes entre elles. Je dirai qu'une substitution aura été réduite à sa plus simple expression, lorsqu'on aura supprimé dans les deux termes tous les indices correspondans égaux.

Soient maintenant $\alpha, \beta, \gamma \ldots \zeta, \eta$ plusieurs des indices $1, 2, 3 \ldots n$ en nombre égal à p; et supposons que la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ réduite à sa plus simple expression prenne la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma \ldots \zeta\,\eta \\ \beta\,\gamma\,\delta \ldots \eta\,\alpha \end{pmatrix},$$

en sorte que pour déduire le second terme du premier, il suffise de ranger en cercle, ou plutôt en polygone régulier, les indices α, β, γ, $\delta \ldots\ldots \zeta$, η de la manière suivante,



et de remplacer ensuite chaque indice par celui qui le premier vient prendre sa place, lorsqu'on fait tourner d'orient en occident le polygone dont il s'agit. Il est aisé de voir que pour obtenir la puissance r de la substitution donnée, il suffira de remplacer chaque indice du polygone par celui qui le premier vient prendre sa place, après

après avoir passé sur un nombre de côtés égal à r, lorsqu'on fait tourner le polygone d'orient en occident. Si l'on veut obtenir de cette manière une substitution identique, il faudra supposer r égal à p, ou à un multiple de p; car chaque indice ne peut revenir à sa place primitive qu'après avoir fait une ou plusieurs fois le tour du polygone. Il suit de là, que le degré de la substitution donnée est égal à p. J'appellerai *polygone indicatif*, ou *cercle indicatif*, le polygone ou cercle formé par les indices compris dans cette substitution, et je la désignerai elle-même sous le nom de *substitution circulaire*. Pour qu'une substitution soit circulaire, il suffit qu'après l'avoir réduite à sa plus simple expression, on puisse passer en revue tous les indices qu'elle comprend, en comparant deux à deux les indices qui se correspondent dans les deux termes. Le degré d'une substitution circulaire est toujours égal au nombre des indices qu'elle renferme.

Soit

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma\delta\ldots\ldots\zeta\eta \\ \beta\gamma\delta\varepsilon\ldots\ldots\eta\alpha \end{pmatrix}$$

une substitution circulaire du degré p,

$$\begin{pmatrix} \beta\gamma\delta\varepsilon\ldots\ldots\eta\alpha \\ \gamma\alpha\beta\delta\ldots\ldots\zeta\eta \end{pmatrix}$$

sera encore une substitution circulaire du degré p; et comme elle est contiguë à la première, ces deux substitutions opérées successivement seront équivalentes à la substitution unique

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma\delta\ldots\ldots\zeta\eta \\ \gamma\alpha\beta\delta\ldots\ldots\zeta\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma \\ \gamma\alpha\beta \end{pmatrix}.$$

Si donc les deux premières substitutions ne changent pas la valeur K_1 de la fonction K, cette valeur ne sera pas non plus changée par la substitution circulaire du troisième degré

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma \\ \gamma\alpha\beta \end{pmatrix}.$$

Il suit de là, que si la valeur K_1 n'est changée par aucune des substitutions circulaires du degré p, elle ne pourra être changée par aucune des substitutions circulaires du troisième degré ; il ne reste plus qu'à développer les conséquences de cette dernière condition.

3.^{e} Partie de la démonstration.

On fait voir que si une valeur de K n'est changée par aucune des substitutions circulaires du 3.^{e} degré, cette fonction sera symétrique, ou n'aura que deux valeurs.

Si l'on désigne sous le nom de *transposition* une substitution circulaire du second degré, telle que $\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \beta\alpha\end{pmatrix}$, ou, ce qui revient au même, l'opération qui consiste à échanger l'un contre l'autre deux indices α et β, et que nous indiquerons comme il suit (α, β) : chaque substitution circulaire du troisième degré sera équivalente à deux transpositions successivement opérées. Ainsi, par exemple, la substitution

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\\ \gamma\alpha\beta\end{pmatrix}$$

sera équivalente au produit des deux substitutions contiguës,

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\\ \beta\alpha\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\alpha\gamma\\ \gamma\alpha\beta\end{pmatrix}.$$

que l'on peut représenter aussi par

$$(\alpha, \beta) \quad (\beta, \gamma).$$

Si donc la valeur K_1 n'est pas changée par la substitution circulaire $\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\\ \beta\gamma\alpha\end{pmatrix}$, la même valeur ne sera pas changée par les transpositions (α, β), (β, γ) opérées successivement; et par suite la transposition (α, β) ne pourra changer K_1 en K_2, sans que la transposition (β, γ) change réciproquement K_2 en K_1, et par conséquent aussi K_1 en K_2 : ainsi les deux transpositions (α, β), (β, γ), qui ont un indice commun β, étant appliquées à K_1, donneront le même résultat K_2. On fera voir de même que si la valeur K_1 n'est pas changée par la substitution circulaire du troisième degré

$$\begin{pmatrix}\beta\gamma\delta\\ \delta\beta\gamma\end{pmatrix},$$

les transpositions (β, γ) et (γ, δ), qui ont un indice commun γ, changeront toutes deux K_1 en K_2. Par suite, les transpositions

$$(\alpha, \beta), \quad (\gamma, \delta),$$

qui n'ont pas d'indices communs, conduiront encore au même résultat.

Il suit de ce qu'on vient de dire, que si la valeur K_1 de la fonction K n'est changée par aucune des substitutions circulaires du troisième degré opérées entre les indices $1, 2, 3 \ldots\ldots n$, et que l'on représente par K_2 la valeur déduite de K_1 par la transposition $(1, 2)$; toutes les autres transpositions changeront encore K_1 en K_2, et par conséquent K_2 en K_1. Par suite, deux transpositions successives ne changeront pas la valeur K_1. Ainsi, dans le cas que l'on considère, le nombre des valeurs différentes de la fonction K, valeurs que l'on peut toujours déduire de K_1 par des transpositions opérées entre les indices $1, 2, 3 \ldots n$, sera tout au plus égal à 2; d'ailleurs, il ne pourrait se réduire à l'unité que dans le cas où cette fonction deviendrait symétrique. Il est donc prouvé par ce qui précède, que si la fonction K n'est pas symétrique, le nombre de ses valeurs ne pourra être inférieur à p, sans devenir égal à 2.

Ainsi, par exemple, en excluant les fonctions symétriques et celles qui ont deux valeurs seulement, on trouvera qu'une fonction du cinquième ou du sixième ordre ne peut obtenir moins de cinq valeurs; une fonction du septième, du huitième, du neuvième ou du dixième ordre, moins de sept valeurs; une fonction du onzième ou du douzième ordre, moins de treize valeurs, &c.... Au reste, comme en supposant $n = 3$ ou $n = 4$ on trouve $p = 3$, on voit que le théorème précédent, dans le troisième et le quatrième ordre, n'exclut pas les fonctions de trois valeurs.

Lorsque l'ordre de la fonction est lui-même un nombre premier, on a $p = n$; ainsi, toute fonction dont l'ordre est un nombre premier ne peut obtenir moins de valeurs qu'elle ne renferme de quantités, pourvu que l'on suppose toujours exclues les fonctions qui n'ont pas plus de deux valeurs.

Au reste, il n'est pas toujours possible d'abaisser l'indice, c'est-à-dire, le nombre des valeurs d'une fonction jusqu'à la limite que nous venons d'assigner; et si l'on en excepte les fonctions du quatrième ordre qui peuvent obtenir trois valeurs, je ne connais pas de fonctions non symétriques dont l'indice soit inférieur à l'ordre, sans être égal à 2. Le théorème ci-dessus démontré prouve du moins qu'il n'en existe pas de semblables, quand l'ordre n de la fonction est un nombre premier, puisqu'alors la limite trouvée se confond avec ce nombre. On peut encore démontrer cette assertion, lorsque n est égal à 6, en faisant voir qu'une fonction de six lettres ne peut obtenir moins de six valeurs, quand elle en a plus de deux. On y parvient, à l'aide des considérations suivantes.

Soit K une fonction du sixième ordre, et désignons toujours par 1, 2, 3, 4, 5, 6, les indices qui affectent les six quantités qu'elle renferme; le nombre total des valeurs possibles de la fonction K sera égal au produit

$$1.2.3.4.5.6 = 720.$$

Soient maintenant α, β, γ, trois des six indices pris à volonté, et K_1 une des valeurs de K. Le nombre des permutations que l'on peut former avec les trois indices α, β, γ, étant égal au produit

$$1.2.3 = 6,$$

on pourra toujours déduire de la valeur K_1 cinq autres valeurs de la fonction K au moyen de transpositions ou de substitutions circulaires du troisième degré opérées entre les indices α, β, γ. Soient

$$K_2,\ K_3,\ K_4,\ K_5,\ K_6,$$

les nouvelles valeurs dont il s'agit; les six valeurs

$$K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ K_5,\ K_6,$$

seront toutes différentes les unes des autres, ou bien elles seront égales deux à deux, trois à trois, ou toutes égales entre elles. Dans la première hypothèse, le nombre des valeurs différentes de la fonction donnée, sera au moins égal à 6. Dans les trois autres hypothèses, une au moins des valeurs

$$K_2, \ K_3, \ K_4, \ K_5, \ K_6,$$

sera égale à K_1; et par suite, on pourra, sans altérer la valeur K_1, échanger entre eux dans cette valeur deux ou trois des indices α, β, γ, soit au moyen d'une simple transposition, soit au moyen d'une substitution circulaire du troisième degré.

Supposons maintenant que l'on partage en plusieurs groupes les six indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, de manière à renfermer dans un même groupe deux indices qui sont à-la-fois compris, soit dans une transposition, soit dans une substitution circulaire du troisième degré qui ne change pas la valeur K_1. D'après ce qui précède, pour que la fonction donnée puisse obtenir moins de six valeurs, il est nécessaire que, sur trois indices α, β, γ pris à volonté, deux au moins se trouvent compris dans un même groupe; et dans ce cas, on ne pourra évidemment former que deux groupes différens, l'un de ces deux groupes pouvant être composé d'un seul indice. Il reste à savoir combien la fonction K peut obtenir de valeurs différentes, quand le nombre des groupes ainsi formé est égal à 2, et quand ce même nombre se réduit à l'unité; l'ordre établi entre trois indices pris à volonté pouvant être interverti d'une certaine manière, sans que la valeur K_1 soit altérée.

Supposons d'abord que les indices se partagent en deux groupes. Soient α et β deux indices pris dans l'un des groupes, et γ un indice pris dans l'autre groupe. Puisqu'on peut échanger entre eux deux de ces trois indices sans altérer la valeur K_1, et que l'indice γ ne peut être échangé avec l'un des deux autres, il est clair que la valeur K_1 ne sera pas altérée par la transposition (α, β). Par suite, cette valeur ne pourra être changée par aucune substitution opérée entre les indices d'un même groupe ; mais elle sera nécessairement altérée par les transpositions ou substitutions qui feront passer dans un des groupes une partie des indices de l'autre : on peut même assurer que deux valeurs de K, pour lesquelles la composition des deux groupes sera différente, seront nécessairement inégales ; car si cela n'avait pas lieu, les valeurs de K' relatives aux diverses manières dont on peut composer les deux groupes dont il s'agit, seraient égales deux à deux, trois à trois, &c.... ou toutes égales entre elles. L'une d'elles serait donc égale à la valeur K_1 de la fonction K, et relativement à cette même valeur, il y aurait plusieurs manières de composer les deux groupes, ce qui est absurde. Ainsi, pour obtenir les valeurs différentes, il suffira de faire passer successivement tous les indices d'un groupe dans l'autre, ou d'échanger les deux groupes entre eux. Cela posé, on obtiendra les résultats suivans.

Si l'un des groupes est composé de cinq indices, et l'autre d'un seul ; comme on pourra faire passer successivement dans ce dernier groupe chacun des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, on obtiendra en tout six valeurs différentes de la fonction K.

Si l'un des groupes est composé de quatre indices, et l'autre de deux ; comme on pourra faire passer successivement dans ce dernier groupe toutes les combinaisons des six indices pris deux à deux, on obtiendra en tout quinze valeurs différentes de la fonction.

Enfin, si les deux groupes sont formés chacun de trois indices, et qu'on ne puisse échanger ces deux groupes ; en faisant passer successivement dans l'un d'eux toutes les combinaisons des indices pris trois à trois, on obtiendra en tout vingt valeurs différentes de la fonction donnée. Le nombre de ces valeurs deviendrait moitié moindre, et se réduirait à dix, si l'on pouvait échanger entre eux les deux groupes, c'est-à-dire, substituer en même temps tous les indices du premier groupe à ceux du second, et réciproquement.

Ainsi, lorsque les indices peuvent être partagés en deux groupes, de telle manière que la transposition de deux indices renfermés dans un même groupe ne change pas la valeur K_1, le nombre des valeurs différentes que la fonction K peut recevoir est nécessairement un de ceux-ci,

$$6, \quad 15, \quad 20, \quad 10.$$

Pour offrir des exemples de ces différens cas, il suffit de citer les quatre fonctions suivantes,

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + a_6,$$
$$a_1 a_2 a_3 a_4 + a_5 a_6,$$
$$a_1 a_2 a_3 + 2a_4 a_5 a_6,$$
$$a_1 a_2 a_3 + a_4 a_5 a_6.$$

Dans chacune de ces fonctions, les indices se partagent en deux groupes, lorsqu'on rassemble dans un même groupe ceux qui sont à-la-fois compris dans des transpositions ou substitutions circulaires du troisième degré qui ne changent pas la valeur de la fonction. Voyons maintenant ce qui arriverait, si tous les indices se trouvaient alors renfermés dans un seul groupe.

Dans cette dernière hypothèse, étant donnée une substitution circulaire du second ou du troisième degré qui ne change pas la valeur K_1 de la fonction K, on pourra toujours trouver une autre substitution de même espèce qui ne change pas cette valeur, et qui ait un ou deux indices communs avec la première. Cela posé, il est facile de voir que toutes les transpositions opérées sur K_1 entre deux indices pris à volonté dans les deux substitutions dont il s'agit, conduiront à une même valeur de la fonction K. Et en effet, si les deux substitutions dont il s'agit ont deux indices communs α et β, il pourra arriver, ou que l'une d'elles soit du second degré et l'autre du troisième, ou qu'elles soient toutes deux du troisième degré. Dans le premier cas, elles pourront être représentées par

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \beta\alpha\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\\ \beta\gamma\alpha\end{pmatrix},$$

γ étant un troisième indice; et puisque la seconde ne change pas la valeur $K_{,}$, on prouvera par un raisonnement semblable à ceux qu'on a déjà faits en pareille circonstance, que les trois substitutions ou transpositions

$$(\alpha, \beta),\ (\alpha, \gamma),\ (\beta, \gamma),$$

donnent la même valeur de K. Dans le second cas, les deux substitutions données pourront être représentées par

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\\ \beta\gamma\alpha\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha\beta\delta\\ \beta\delta\alpha\end{pmatrix},$$

γ et δ étant deux nouveaux indices. En vertu de la première, les trois transpositions

$$(\alpha, \beta),\ (\alpha, \gamma),\ (\beta, \gamma)$$

donneront la même valeur de K. En vertu de la seconde, les trois transpositions

$$(\alpha, \beta),\ (\alpha, \delta),\ (\beta, \delta)$$

donneront aussi la même valeur de K; et comme la transposition (α, β) ne peut donner qu'une seule valeur de K, il en résulte que les cinq transpositions

$$(\alpha, \beta),\ (\alpha, \gamma),\ (\beta, \gamma),\ (\alpha, \delta),\ (\beta, \delta)$$

conduiront au même résultat.

Supposons maintenant que les deux substitutions données aient un seul indice commun. Il pourra arriver, ou que ces deux substitutions soient du second degré, ou que l'une soit du second degré et l'autre du troisième, ou que toutes deux soient du troisième degré.

Pour donner un exemple du premier cas, soient

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \beta\alpha\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha\gamma\\ \gamma\alpha\end{pmatrix};$$

deux

deux substitutions qui ne changent pas la valeur K_1 : ces deux substitutions équivalent aux deux transpositions (α, β), (α, γ); et comme, en vertu de la première, on peut faire passer l'indice β à la place de l'indice α sans déplacer l'indice γ, il est clair que les indices β et γ jouiront respectivement des mêmes propriétés que les indices α et γ, en sorte que la transposition

$$(\beta, \gamma)$$

ne changera pas la valeur K_1.

Soient, dans le second cas,

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \beta\alpha\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha\gamma\delta\\ \gamma\delta\alpha\end{pmatrix},$$

les deux substitutions données : on pourra, en opérant une ou deux fois de suite la seconde substitution, faire passer successivement l'indice γ et l'indice δ à la place de l'indice α, sans déplacer l'indice β. Par suite, les trois transpositions

$$(\alpha, \beta), \quad (\beta, \gamma), \quad (\beta, \delta)$$

ne changeront pas la valeur K_1; et on en conclura, comme dans le cas précédent, que les transpositions

$$(\alpha, \gamma), \quad (\alpha, \delta), \quad (\gamma, \delta)$$

ne la changeront pas non plus.

Enfin, soient, dans le troisième cas,

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\\ \beta\gamma\alpha\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha\delta\varepsilon\\ \delta\varepsilon\alpha\end{pmatrix},$$

les deux substitutions données : on pourra, en opérant une ou deux fois de suite la seconde substitution, faire passer successivement les indices δ et ε à la place de l'indice α, sans déplacer les indices β et γ; et l'on en conclura que les substitutions

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\\ \beta\gamma\alpha\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \delta\beta\gamma \\ \beta\gamma\delta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon\beta\gamma \\ \beta\gamma\varepsilon \end{pmatrix}$$

ne changent pas la valeur K_1 : par suite, les transpositions opérées entre deux quelconques des indices α, β, γ, δ, ε donneront une même valeur de la fonction K.

Si l'on étend de proche en proche les raisonnemens que l'on vient de faire aux indices compris dans les diverses substitutions, qui, par hypothèse, ne changent pas la valeur K_1 : on en conclura que les transpositions effectuées sur K_1 entre les six indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, considérés deux à deux, conduisent toutes à une même valeur de la fonction K, que je désignerai par K_2; par suite, K_1 conservera la même valeur après un nombre pair de transpositions successives, et sera changé en K_2 après un nombre impair de transpositions. La fonction aura donc deux valeurs, si K_1 et K_2 sont différens l'un de l'autre : elle n'en aura qu'une seule, c'est-à-dire, qu'elle deviendra symétrique, si l'on a

$$K_2 = K_1.$$

En résumant ce qui a été dit ci-dessus, on voit qu'une fonction du sixième ordre ne peut avoir moins de six valeurs, à moins que le nombre de ces valeurs ne devienne égal à 2 ou à l'unité.

Tous les théorèmes énoncés dans le présent mémoire subsisteraient encore, si quelques-unes des quantités renfermées dans les fonctions que l'on considère s'y trouvaient multipliées par zéro : mais alors ces dernières quantités venant à disparaître, il faudrait, pour déterminer l'ordre de chaque fonction, avoir égard non pas au nombre des quantités qu'elle renferme, mais au nombre de ces quantités augmenté du nombre de celles qu'on peut substituer à leur place. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par a_1, a_2, a_3, a_4 les quatre racines d'une équation du quatrième degré, la quantité

$$a_2 + a_4,$$

considérée comme une fonction de ces racines, sera du quatrième ordre, et cette fonction sera susceptible de six valeurs qui seront respectivement

$$a_1 + a_2,\ a_1 + a_3,\ a_1 + a_4,\ a_2 + a_3,\ a_2 + a_4,\ a_3 + a_4.$$

Il ne sera peut-être pas inutile d'indiquer ici les conditions auxquelles une fonction doit satisfaire, pour que le nombre de ses valeurs se réduise à 2. Soit K une fonction de cette nature, et désignons par K_1, K_2 les deux valeurs dont il s'agit. Le nombre de ces valeurs étant égal à 2, et par conséquent inférieur à 6, si l'on partage en plusieurs groupes les indices contenus dans la fonction, de manière à renfermer dans un même groupe deux indices qui sont à-la-fois compris, soit dans une transposition, soit dans une substitution circulaire du troisième degré qui ne change pas la valeur K_1; on fera voir, comme ci-dessus, que sur trois indices pris à volonté, deux au moins seront compris dans un même groupe, d'où il suit qu'on ne pourra former plus de deux groupes différens. D'ailleurs, en appliquant ici les raisonnemens dont nous avons déjà fait usage, on prouvera que le nombre des groupes ne saurait être égal à 2, à moins que les diverses valeurs de la fonction, relatives aux différentes manières dont on peut composer ces deux groupes en faisant passer les indices de l'un dans l'autre, ne soient toutes inégales; et dans ce cas, le nombre des valeurs de la fonction serait nécessairement supérieur à 2, ce qui est contre l'hypothèse. Par suite, pour que cette hypothèse subsiste, il est nécessaire que tous les indices soient renfermés dans un seul groupe; d'où l'on peut conclure, au moyen de la théorie précédemment exposée, que K_1 doit conserver le même signe après un nombre pair de transpositions d'indices, et se changer en K_2 après un nombre impair de transpositions. Ainsi, par exemple, toute fonction qui, comme la la suivante,

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)\ldots(a_{n-1}-a_n)$$

ne peut obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires, conservera toujours le même signe après un nombre pair de transpositions d'indices, et changera toujours de signe après un nombre impair de transpositions; d'où il suit que chacun de ses termes soumis aux transpositions que l'on considère, recevra alternativement le signe $+$ et le signe $-$.