Exercice n°4 : produit de convolution (fonction triangle)

Trouver la fonction $h(t)$ telle que :

$$h(t) = f_1(t) \otimes f_1(t)$$

Avec

$$f_1(t) = \begin{vmatrix} 1 & \quad pour \; -\frac{1}{2} \leq t \leq +\frac{1}{2} \\ 0 & \quad ailleurs \end{vmatrix}$$

Déduire sa transformée de Fourier $H(\nu)$.

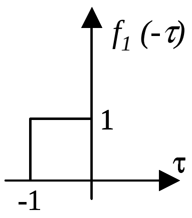
Solution

Le produit de convolution des deux fonctions $f_1(t)$ et $f_1(t)$ est défini par la relation :

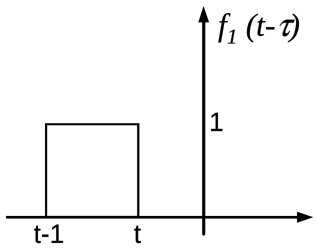
$$h(t) \;=\; f_1(t) \otimes f_1(t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\; f_1(t-\tau)\, d\tau$$

Pour évaluer ce produit de convolution, il faut :

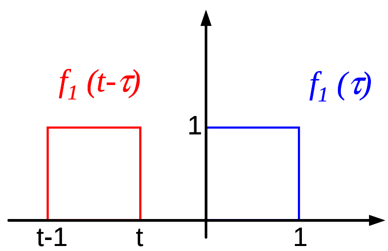
1. considérer $f_1(-\tau)$ ("retournement" de la fonction $f_1(t)$),



2. décaler la fonction de la valeur t pour obtenir $f_1(t-\tau)$,



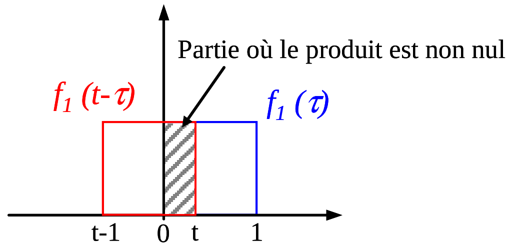
3. multiplier $f_1(-\tau)$ par $f_1(t-\tau)$ en déterminant les intervalles où il n'y a pas de changement dans la variation de $h(t)$,
4. intégrer le produit sur $\left[-\infty\,,+\infty\right]$ (par parties sur les intervalles préalablement déterminés).



Sur la figure de dessus, on remarque que pour toutes les valeurs de t < 0, le produit des deux fonctions (bleue et rouge) est nul.
Donc pour $t \leq 0$:

$$h(t) \;=\; 0$$

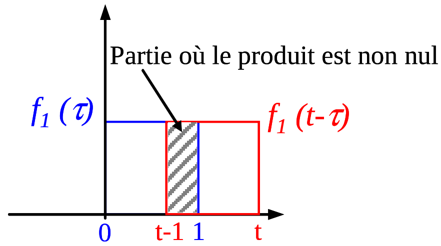
Pour t > 0, le rectangle rouge commence à "rentrer" dans le rectangle bleu. Le produit des deux devient alors nul pour le parties communes, jusqu'au recouvrement total des deux fonctions, c'est-à-dire à t = 1.



Donc pour $0 \le t \le 1$:

$$h(t) = \int_0^t 1 \,.\, 1 \, d\tau = [\tau]_0^t$$
$$= t$$

Pour $1 \le t \le 2$, le rectangle rouge commence à "sortir" du rectangle bleu. Le produit des deux n'est donc nul que pour les parties qui restent communes, jusqu'à ce que les deux fonctions soient à nouveau séparées, c'est-à-dire à *t*-1 = 1, soit *t* = 2.



Donc pour $1 \le t \le 2$:

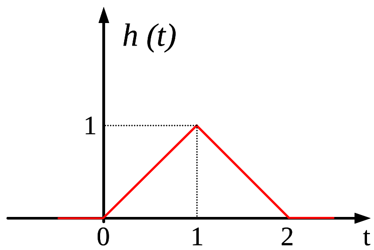
$$h(t) = \int_{t-1}^{1} 1 \,.\, 1 \, d\tau = [\tau]_{t-1}^{1}$$
$$= [1-(t-1)]$$
$$= 2 - t$$

Et enfin pour t > 2, le produit des deux fonctions redevient nul pour toutes les valeurs de t :

$$h(t) = 0$$

Pour résumer :

$$h(t) = \begin{vmatrix} 0 & pour & t \le 0 \\ t & pour & 0 < t \le 1 \\ 2-t & pour & 1 < t \le 2 \\ 0 & pour & 2 < t \end{vmatrix}$$



Le produit de convolution de deux rectangles identiques est un triangle

$$h(t) = f_1(t) \otimes f_1(t)$$

Donc

$$H(\nu) = F_1(\nu) \cdot F_1(\nu) = \left(F_1(\nu)\right)^2$$

Or

$$F_1(\nu) = \int_0^1 e^{-j2\pi\nu t} dt = \frac{-1}{j2\pi\nu}\left[e^{-j2\pi\nu t}\right]_0^1$$

$$F_1(\nu) = \frac{-1}{j2\pi\nu}\left[e^{-2j\pi\nu} - 1\right]$$

$$F_1(\nu) = \frac{e^{-j\pi\nu}}{\pi\nu}\left[\frac{e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}}{2j}\right] = \frac{e^{-j\pi\nu}}{\pi\nu}\sin(\pi\nu)$$

$$F_1(\nu) = \frac{e^{-j\pi\nu}}{\pi\nu}\sin(\pi\nu) = e^{-j\pi\nu}\cdot \mathrm{sinc}(\pi\nu)$$

Remarque : Ce résultat aurait pu être retrouvé à partir du résultat de l'exercice 1, en appliquant la propriété de décalage (décalage de 1/2).

Soit :

$$TF\left(rect(t-1/2)\right) = e^{-j\pi\nu}\cdot TF\left(rect(t)\right)$$
$$= e^{-2j\pi\nu 1/2}\,\mathrm{sinc}(\pi\nu)$$

Finalement :

$$H(\nu) = F_1(\nu)\cdot F_1(\nu) = \left(F_1(\nu)\right)^2$$
$$= e^{-2j\pi\nu}\left(\sin c(\pi\nu)\right)^2$$