- EDP à résoudre :

Le but de cette partie est de résoudre l'équation (*) suivante pour $x \in [0\ ,\ 1]$ et $t \in [0\ ,\ 1]$:

$$\frac{\partial\left(\mathrm{a}(\mathrm{x})\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right)}{\partial \mathrm{x}} - \mathrm{u} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}$$

Avec :

$$a(x) = \begin{cases} 0.25, & x \leq 0.5 \\ 0.75, & x > 0.5 \end{cases}$$

Les conditions de bord sont : $u(0,t) = 2, u(L,t) = 1$ et $u(x,0) = 1.5$

- Schéma numérique proposé :

Soient N et M deux entiers. On définit les points de discrétisation du maillage par :

$$\begin{cases} x_i = ih, i \in \{0,1,2,\dots,N+1\} \text{ où } h = \frac{1}{N+1} \\ t_j = j\Delta t, j \in \{0,1,2,\dots,M+1\} \text{ où } \Delta t = \frac{1}{\mathrm{M}+1} \end{cases}$$

On cherche en chacun des couples (x_i, t_j) une valeur approchée, notée $u_i^{(j)}$ de $u(x_i, t_j)$.

On prend naturellement $u_0^{(j)} = 2, u_{N+1}^{(j)} = 1$ et $u_i^{(0)} = 1.5$

En adoptant une approximation décentrée à droite pour la dérivée spatiale et une approximation décentrée à gauche pour la dérivée temporelle, l'équation (*) donne pour $(i,j) \in [\![0, N-1]\!] * [\![1, M+1]\!]$:

$$\frac{a(x_{i+1})\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1}, t_j) - a(x_i)\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)}{h} - u_i^{(j)} = \frac{1}{\Delta t}\left(u_i^{(j)} - u_i^{(j-1)}\right)$$

On remplace chacune des dérivées spatiales par les approximations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1}, t_j) = \frac{u_{i+1}^{(j)} - u_i^{(j)}}{h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{u_i^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}}{h}$$

L'équation (*) devient alors :

$$\left(\frac{a(x_i)}{h^2}\right)u_{i-1}^{(j)} - \left(1 + \frac{a(x_{i+1}) + a(x_i)}{h^2}\right)u_i^{(j)} + \left(\frac{a(x_{i+1})}{h^2}\right)u_{i+1}^{(j)}$$
$$= \frac{\varepsilon}{\Delta t}\left(u_i^{(j)} - u_i^{(j-1)}\right)$$

- Etude de la consistance du schéma (technique de l'équation modifiée) :

On sait que :

$$u_i^{(j-1)} = u_i^{(j)} - \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_i^{(j)} \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_i^{(j)} \Delta t^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\bigg|_i^{(j)} \Delta t^3 + \cdots$$

$$u_{i\pm 1}^{(j)} = u_i^{(j)} \pm \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_i^{(j)} h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_i^{(j)} h^2 \pm \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\bigg|_i^{(j)} h^3 + \cdots$$

Donc :

$$\left(\frac{a(x_i)}{h^2}\right)\left(u_i^{(j)} - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_i^{(j)} h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_i^{(j)} h^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\bigg|_i^{(j)} h^3 + \cdots\right)$$
$$- \left(1 + \frac{a(x_{i+1}) + a(x_i)}{h^2}\right)u_i^{(j)}$$
$$+ \left(\frac{a(x_{i+1})}{h^2}\right)\left(u_i^{(j)} + \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_i^{(j)} h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_i^{(j)} h^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\bigg|_i^{(j)} h^3\right.$$
$$\left. + \cdots\right)\cdots = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_i^{(j)} \Delta t - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_i^{(j)} \Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\bigg|_i^{(j)} \Delta t^3 - \cdots\right)$$

D'où :

$$\frac{a(x_{i+1}) - a(x_i)}{h}\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_i^{(j)} + \frac{a(x_{i+1}) + a(x_i)}{2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_i^{(j)}$$
$$+ \frac{a(x_{i+1}) - a(x_i)}{6}\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\bigg|_i^{(j)} h + \cdots$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_i^{(j)} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_i^{(j)} \Delta t + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\bigg|_i^{(j)} \Delta t^2 - \cdots$$

Lorsque $h \to 0$ et$\Delta t \to 0$, l'équation modifiée ne tend pas vers l'EDP (*). En effet, le terme $\frac{a(x_{i+1}) - a(x_i)}{h}$ tend vers l'infini. Le schéma numérique n'est donc pas consistant avec l'EDP à résoudre.