Modèle de Lokta-Volterra

Ce problème est consacré à l'étude de l'équation de Lotka-Volterra, donnée par

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) - \beta u(t)v(t), \\ v'(t) = \gamma u(t)v(t) - \delta v(t) \end{cases} \tag{1}$$

On admet le théorème suivant (appelé théorème de Cauchy-Lipschitz) :

Soient $t_0 \in \mathbb{R}^+$ et u_{t_0}, v_{t_0} deux réels fixés.

Alors, il existe une et une seule solution (u, v) au système différentiel (1) sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant :

$$u(t_0) = u_{t_0}, v(t_0) = v_{t_0}.$$

L'équation (1) a été introduite par Volterra après la seconde guerre mondiale afin de comprendre la dynamique des populations de sardines et de requins en mer Adriatique. Volterra cherchait notamment à comprendre pourquoi les quantités de sardines pêchées après l'interruption dûe à la guerre n'étaient plus aussi importantes qu'auparavant alors qu'à l'inverse la proportion observée de requins avait augmenté.

Dans l'équation (1), la variable t (qui décrit $\mathbb{R}^+$) représente le temps, $u(t)$ représente la densité de proies (les sardines) présentes à l'instant t, $v(t)$ la densité de prédateurs (les requins) présents à l'instant t, α le taux de croissance par individu des proies, δ le taux de mortalité par individu des prédateurs, β le taux de prédation et $e = \frac{\gamma}{\beta}$ le paramètre d'efficacité de la conversion de nourriture en croissance.

1 Première Partie

1) Commenter brièvement ces différentes dénominations. Quelles sont les hypothèses cruciales sur lesquelles repose ce modèle ?

2) Cas particulier du conflit : comment répercuter la baisse d'intensité de la pêche dans l'équation (1)?

3) Solutions limites : calculer la solution de (1) quand $v(0) = 0$ et $u(0) > 0$. Ce type de solution vous semble-t-il réaliste ?
Discuter de même le cas où $u(0) = 0$ et $v(0) > 0$.

4) Points d'équilibres du système : rechercher les solutions stationnaires du système (1), c-à-d les couples (u, v) de solutions constantes.

5) Soit (u, v) une solution de (1) sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que s'il existe un réel positif t_0 tel que $u(t_0) = 0$ (resp. $v(t_0) = 0$) alors $u = 0$ (resp. $v = 0$). En déduire que si $u(0) > 0$ et $v(0) > 0$ alors : $\forall t \in \mathbb{R}^+, u(t) > 0$ et $v(t) > 0$.

On fixera par la suite $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$ et on considérera la solution (u, v) de (1) telle que $u(0) = u_0$ et $v(0) = v_0$.
On notera dans tout ce problème:

$$u^* = \frac{\delta}{\gamma} \text{ et } v* = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Pour l'étude de cette équation nous allons nous ramener à une équation équivalente, obtenue par changement de l'échelle de temps et changements d'inconnues :

$$s = \alpha t, \text{ proies } : X(s) = \frac{\gamma}{\delta}u(t) = \frac{u(t)}{u^*} \text{ et prédateurs } : Y(s) = \frac{\beta}{\alpha}v(t) = \frac{v(t)}{v^*}.$$

6) Montrer qu'alors (1) équivaut à :

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds} = X - XY \\ \\ \frac{dY}{ds} = r(XY - Y) \end{cases} \tag{2}$$

où $r = \frac{\delta}{\alpha}$

Cette expression du modèle fait clairement apparaître que, aux dimensions de l'échelle temporelle et aux mises à échelles des variables décrivant les populations près, la dynamique du système dépend du seul paramètre adimensionnel r. Rappeler ce que représente ce paramètre.

2 Etude mathématique du système (2)

Dans cette partie on désigne par V une fonction réelle de deux variables réelles strictement positives x et y de la forme

$$V(x,y) = \phi(x) + \psi(y),$$

où ϕ et ψ sont deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1) Expliciter la relation

$$x(1-y)\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = ry(1-x)\frac{\partial V}{\partial y}(x,y) \tag{3}$$

où $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$ désignent les dérivées partielles de V, à l'aide des dérivées de ϕ et ψ.

2) Déterminer deux fonctions ϕ et ψ telles que V soit solution de (3).

3) On considère le système des deux équations différentielles

$$\left\{\begin{array}{l} X' = X - XY \\ Y' = r(XY - Y) \end{array}\right. \tag{4}$$

où X et Y sont deux fonctions inconnues, strictement positives, dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées respectives X' et Y' et r un réel > 0.

3.a) Montrer que pour tout T réel, si X et Y vérifient (4) alors les fonctions $t \mapsto X(t+T)$ et $t \mapsto Y(t+T)$ vérifient aussi (4).

3.b) Monter que si V satisfait (3) et si X et Y vérifient (4) sur $\mathbb{R}$, alors la fonction composée $t \mapsto V(X(t), Y(t))$ est constante.

4) On considère dans cette question la fonction V définie pour tous réels positifs x et y par :

$$V(x,y) = r(\ln x - x) + \ln y - y$$

4.a) Montrer que V possède des dérivées partielles d'ordre 2 et calculez-les.

4.b) Montrer que V ne peut posséder d'extremum qu'en un seul point, que l'on déterminera.

4.c) Montrer que V admet un maximum strict au point trouvé.

5) Interprétation du diagramme de phases :

Voici ci-dessous une représentation graphique des couples (x, y) tels que $V(x,y) = V(x_0, y_0)$ pour différentes valeurs de (x_0, y_0) (ce sont des lignes de niveau de V). Ce graphe a été obtenu pour $r = 1$ mais une autre valeur de $r > 0$ donne un résultat semblable.

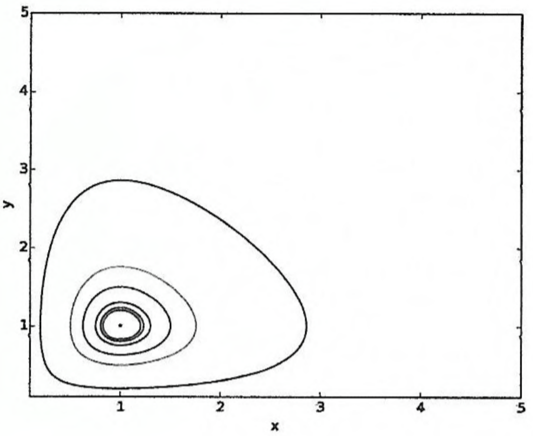

Figure 1: diagramme des phases

- A quoi voit-on que les couples solutions de (4) sont périodiques ?
- A quoi correspond le point qui apparaît au centre des courbes ?

3 Retour au problème de Volterra.

Nous admettons dans le cas général le résultat suivant :
Si (u, v) est un couple solution de (1) tel que $u(0)$ et $v(0) > 0$ alors (u, v) admet une période T.

1) Montrez que : si (u, v) est une solution de (1) alors:

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds = u^* \text{ et } \frac{1}{T}\int_0^T v(s)ds = v^*.$$

Que représentent ces deux intégrales? Qu'y a-t-il de notable dans ces égalités?

2) En vous appuyant sur le résultat précédent et sur les questions de la partie I, montrez que l'équation (1) donne une explication aux observations de Volterra.

4 Etude numérique de l'équation (1) par la méthode d'Euler.

Dans cette question, on considère le système (1) avec $\alpha = 3, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 2$. On se donne un intervalle de temps $[0, S]$ et un entier naturel non nul N.

En utilisant la subdivision de $[0, S]$:$\{t_n = \frac{nS}{N}$ tq $n \in \{0, ..., N\}\}$, appliquer la méthode d'Euler au système (1) pour obtenir des approximations d'une solution (u, v) sur l'intervalle de temps $[0; S]$.

Vous justifierez et décrirez la méthode et écrirez en langage Python une fonction Euler_LV qui prend en argument u_0, v_0, N et S et qui renvoie les listes U et V contenant respectivement les valeurs approchées de u et de v obtenues par cette méthode.

Vous produirez un graphique donnant u et v en fonction du temps et un autre donnant u en abscisse et v en ordonnée pour t décrivant $[0, S]$ (portrait de phase). Vous prendrez : $u_0 = 2$, $v_0 = 2$ et $S = 10$ (à vous de choisir N.)
Commentez.