tout entier ($S_0 = \pi a^2$), nous avons :

$$t = 2\pi \frac{S}{S_0}.$$

$\frac{S_0}{S} = \frac{2\pi}{t}$

Admettons maintenant que S désigne l'aire d'un secteur analogue de l'hyperbole équilatère (fig. 173). Nous avons :

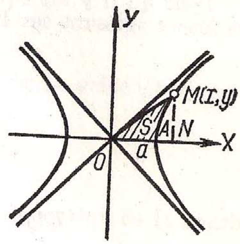

Fig. 173

$$S = \text{aire } OMN - \text{aire } AMN =$$

$$= \frac{1}{2} xy - \int_a^x y\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - a^2} - \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\,dx.$$

En calculant l'intégrale d'après la formule de [III-1-7], nous trouvons :

$$S = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right]_a^x =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right).$$

Si maintenant nous posons, en désignant à nouveau par S_0 l'aire du cercle,

$$t = 2\pi \frac{S}{S_0} = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right),$$

nous trouvons sans peine que :

$$e^t = \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \qquad e^{-t} = \frac{1}{\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} = \frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1},$$

d'où, en additionnant terme à terme et en multipliant par $\frac{a}{2}$:

$$x = \frac{a}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) = a \operatorname{ch} t, \quad y = \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t - a^2} = a \operatorname{sh} t,$$

c'est-à-dire que nous trouvons bien la représentation paramétrique d'une hyperbole équilatère.

VI-1-9. Chaînette. Examinons la courbe d'un fil pesant homogène, suspendu par ses extrémités A_1 et A_2 (fig. 174).

Dans le plan de cette courbe, menons l'axe OX horizontalement et l'axe OY verticalement vers le haut. Examinons les éléments $MM_1 = ds$ du fil. Sur chacun d'eux agissent les tensions T et T_1 des autres parties du fil et le poids de l'élément. Les tensions sont appliquées aux extrémités M et M_1 de l'élément