Devoir maison. Théorème de convergence monotone. Variante sur sommes dénombrables.

Hypothèses : pour $n \geq 0$, f_n est une suite de fonctions définies sur N, à valeurs dans R.

f_n est une suite **croissante** de fonctions **positives**, de limite f.

On pose

$$S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k)$$

et

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)$$

Note : S et L peuvent être infinis.

1. Démontrer que $S \leq L$.

2. Soit m un entier naturel quelconque, et soit c un réel quelconque de [0 ; 1[.

a. Montrer qu'il existe **N**, dépendant de m et c, tel que :

$f_N(k) \geq c\, f(k)$, pour tout k entier compris entre 0 et m.

b. En déduire que pour tout $n \geq$ **N**, on a :

$f_n(k) \geq c\, f(k)$, pour tout k entier compris entre 0 et m.

c. Puis que, pour tout $n \geq$ **N**, on a :

$$\sum_{k=0}^{m} f_n(k) \geq c \left(\sum_{k=0}^{m} f(k) \right)$$

d. En déduire alors que, pour tout $n \geq$ **N**, on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_n(k) \geq c \left(\sum_{k=0}^{m} f(k) \right)$$

e. En déduire que :

$$S \geq c \left(\sum_{k=0}^{m} f(k) \right)$$

f. En déduire que $S \geq L$. Conclure.