$U_0 = 1$. $U_{n+1} = 1 + \frac{n}{U_n}$. Donc $U_{n+1} - U_n = \frac{n+U_n-U_n^2}{U_n}$. Pour commencer, on montre aisément que cette suite est strictement positive. Après, puisqu'on veut démontrer que la suite U se comporte comme $\sqrt{n}$, alors il raisonnable de penser que cette suite U est croissante.

Donc on pose la propriété P_n = " $n + U_n - U_n^2 \geq 0$ ", de façon à assurer que $U_{n+1} - U_n \geq 0$.

Du coup on a P_{n+1} = "$n + 1 + U_{n+1} - (U_{n+1})^2 \geq 0$".

$$n + 1 + U_{n+1} - (U_{n+1})^2 = n + 1 + 1 + \frac{n}{U_n} - \left(1 + \frac{n}{U_n}\right)^2 = \frac{(n+1)U_n^2 - nU_n - n^2}{(U_n)^2}$$

On ne retrouve pas au numérateur l'expression $n + U_n - U_n^2$.

On pose donc Q_n = " $(n+1)U_n^2 - nU_n - n^2 \geq 0$ ".

Il faut que Q_n soit vraie pour que P_{n+1} soit vraie.

Du coup on a Q_{n+1} = "$(n+2)U_{n+1}^2 - (n+1)U_{n+1} - (n+1)^2 \geq 0$".

$$(n+2)U_{n+1}^2 - (n+1)U_{n+1} - (n+1)^2 = \frac{n\left[\ (n+3)U_n + n(n+2) - (n+2)U_n^2\ \right]}{(U_n)^2}$$

Comme (n + 3) > (n + 2) alors :

$$(n+2)U_{n+1}^2 - (n+1)U_{n+1} - (n+1)^2 \geq \frac{n(n+2)\left[\ U_n + n - U_n^2\ \right]}{(U_n)^2}$$

Au numérateur, on retrouve, au facteur n(n+2) près, l'expression $U_n + n - U_n^2$.

Donc il faut que P_n soit vraie pour que Q_{n+1} soit vraie.

Reste à vérifier que P_0 et Q_0 sont vraies.

P_0 = " $0 + U_0 - U_0^2 \geq 0$ "   et Q_0 = " $(0+1)U_0^2 - 0U_0 - 0^2 \geq 0$ ".

Comme $U_0 = 1$ alors on voit que P_0 et Q_0 sont vraies.

On vient de démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$:

$$n + U_n - U_n^2 \geq 0$$

$$(n+1)U_n^2 - nU_n - n^2 \geq 0$$

La seule racine strictement positive du trinome $-x^2 + x + n$ est $\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$.

Comme $n + U_n - U_n^2 \geq 0$, il faut que $U_n \leq \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$ pour tout $n \geq 0$.

La seule racine positive ou nulle du trinome $(n+1)x^2 - nx - n^2$ est $\frac{n}{n+1}\frac{1+\sqrt{5+4n}}{2}$.

Comme $(n+1)U_n^2 - nU_n - n^2 \geq 0$, il faut que $\frac{n}{n+1}\frac{1+\sqrt{5+4n}}{2} \leq U_n$ pour tout $n \geq 0$.

Au final on a démontré que, pour tout $n \geq 0$, : $\frac{n}{n+1}\frac{1+\sqrt{5+4n}}{2} \leq U_n \leq \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$.

On en déduit aisément le comportement à l'infini demandé. Par exemple : $\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$ se comporte comme $\frac{1}{2} + \sqrt{n} + \frac{1}{8\sqrt{n}}$