Le système de la Figure 2 est constitué d'un double pendule permettant des oscillations uniquement dans le plan de la figure. Les tiges de longueur l sont supposées être indéformables et de masse négligeable. Les deux pendules sont couplés au niveau de la masse m à deux ressorts de rappel de coefficient de raideur k. Les frottements sont supposés être négligeables. **Seul le régime des petites oscillations pour lequel θ_1 et $\theta_2 << 1$ sera étudié.**

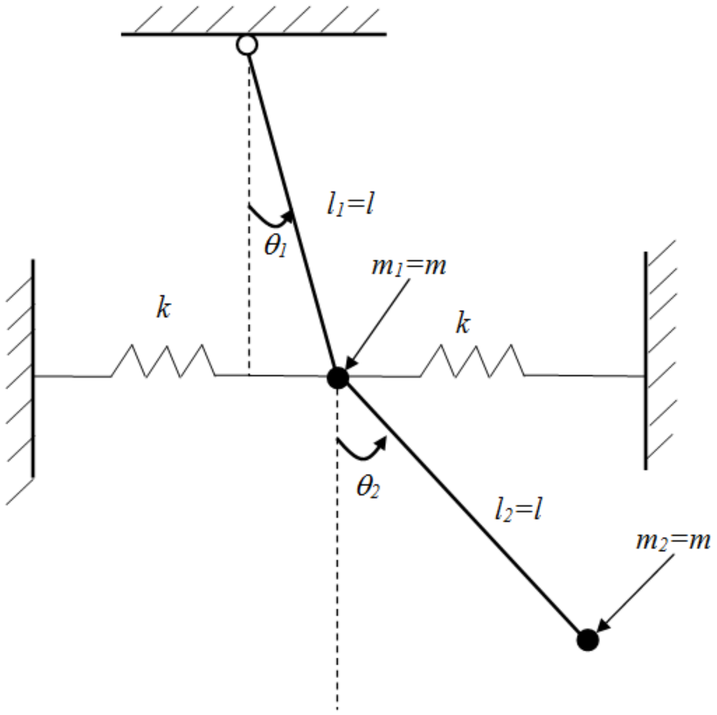

Figure 2

1. Calculer les énergies cinétiques et potentielles de chaque masse, ainsi que l'énergie potentielle emmagasinée par les ressorts.

Montrer que les énergies cinétique et potentielle totales peuvent se mettre sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} m l^2 (2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \quad ; \quad V = \frac{1}{2} m g l (2\theta_1^2 + \theta_2^2) + k l^2 \theta_1^2$$

2. Ecrire les équations du mouvement en utilisant les équations d'Euler–Lagrange, et montrer qu'elles peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$l\left(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + \left(2g + 2\frac{kl}{m}\right)\theta_1 = 0$$
$$l\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + g\theta_2 = 0$$

3. Dans le cas où les deux raideurs latérales sont absentes (k=0) et en notant $\omega_0^2 = g/l$, calculer les pulsations propres et les vecteurs propres correspondants.

4. Dans le cas où les deux raideurs latérales sont fortement rigides (dans la limite $k \to \infty$), montrer que $\theta_1 << \theta_2$, c'est à dire que l'on retrouve à la limite le résultat d'un pendule simple.

5. Pour le cas général où les raideurs latérales ne sont pas nulles ou de valeur infinie, étudier les modes propres pour les équations complètes du mouvement (cf. question 2) en notant : $\omega_{01}^2 = g / l$ et $\omega_{02}^2 = k / m$. On suppose de plus que $\omega_{02}^2 = \omega_{01}^2 (1+\varepsilon)$, avec $\varepsilon << 1$. Exprimer l'équation aux pulsations propres dans ce cas, et montrer que les deux pulsations propres s'écrivent lorsque $\varepsilon = 0$ sous la forme $\omega^2 = (3 \pm \sqrt{5})\,\omega_{01}^2$.