.1 Nombres Réels $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels est le pilier fiable de la famille,
le corps ordonné complet sur lequel nous comptons tous.
John Baez [1]

.1.1 Introduction

L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, est un ensemble de nombres dont la perception est généralisée, en effet une définition informelle peut être utilisée très tôt auprès des collégiens, et aujourd'hui, tous les scientifiques, et pas seulement eux, utilisent les nombres réels, ou plus exactement **croient** utiliser les réels, en effet aucun instrument de mesure ne délivre un nombre réel.

La nécessité d'une définition claire des nombres réels s'est vraiment fait jour au XIX$^{\text{ième}}$ siècle, quelques noms apparaissent sur ce sujet en une poignée d'années :

- Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, un mathématicien allemand (1815 - 1897) enseigne, dès les années 1850, une construction des nombres réels dont Heine et Cantor s'inspireront.
- Julius Wilhelm Richard Dedekind, un mathématicien allemand (1831 - 1916) publie en 1872 « Continuité et nombres irrationnels », un ouvrage qui reprend ses travaux et conférences initiés en 1858 sur les coupures qui portent son nom aujourd'hui.
- Hugues Charles Robert Méray, un mathématicien français (1835 - 1911), propose la construction à partir des suites de Cauchy en 1869 dans un article baptisé : « Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données. ».
- Eduard Heine, un mathématicien allemand (1821 - 1881) publie en 1872 un article « Les éléments de la théorie des fonctions » dans lequel il expose de façon très didactique la méthode des suites de Cauchy.
- Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, un mathématicien allemand (1831 - 1916), publie en 1872 un article dans lequel il reprend les travaux de Heine de façon plus synthétique, la méthode par les suites de Cauchy est parfois appelé, *Méthode de Cantor*.

Un peu plus tard en 1899, David Hilbert, un mathématicien allemand (1862 - 1943) donna la première définition axiomatique des réels.

On peut aussi noter que l'accueil des nombres réels, même parmi les mathématiciens du XVIII$^{\text{ième}}$ siècle n'a pas été immédiat :

« $\sqrt{2}$ *n'est point un nombre proprement dit, c'est une quantité qui n'existe point, qu'il est impossible de trouver* » [2].

La dénomination des nombres non rationnels est, à ce titre, édifiante :

« *Quand nous n'avons pas pour une quantité une expression exacte, nous la nommons sourde, parce qu'alors elle échappe comme un bruit sourd qu'on distingue mal.* » [3]

.1.2 Définition

Il a déjà été noté que l'on sait additionner, multiplier et ordonner les nombres rationnels, on peut faire la même chose avec les longueurs mesurées sur une droite, et, grâce à un repère (le choix de 0 et de 1), on peut reporter tous les nombres rationnels (voir les nombres Constructibles), par contre on sait (depuis les mathématiciens grecs du V$^{\text{ième}}$, voire du VI$^{\text{ième}}$ siècle avant JC) que certaines longueurs sont incommensurables (la diagonale d'un carré de longueur 1, par exemple), il y a donc « plus » de points sur une droite que de nombres dans $\mathbb{Q}$, d'où l'idée de boucher les trous [4], de compléter $\mathbb{Q}$.

Les Nombres Réels comprennent donc les Nombres Rationnels et les Nombres Constructibles, mais on peut noter tout de suite que, parmi les Irrationnels, certains sont solutions d'une équation polynomiale à coefficients entiers (c'est le cas de $\sqrt{2}$, par exemple), ces nombres sont dits Algébriques ; attention néanmoins, l'ensemble des Nombres Algébriques n'est pas inclus dans $\mathbb{R}$, par exemple les solutions de l'équation $x^2 + 1 = 0$ ne sont pas réelles ; mais il existe aussi dans $\mathbb{R}$ des nombres qui ne sont pas solutions d'équations polynomiales à coefficients entiers (c'est le cas de e ou de π, par exemple), ces nombres sont dits transcendants.

1. Cité par Valentin Ovsienko (Lyon 1) comme résumé d'une conférence sur les algèbres au Laboratoire Paul Painlevé. Voir aussi : les Complexes, les Quaternions, les Octonions, les Sédénions, les Trigintaduonions, les Sexagintaquatronions.
2. d'Alembert, 1751.
3. Étienne Bonnot de Condillac (1715 - 1780), La Langue des Calculs (1798), œuvre posthume
4. Ce qui a donné naissance au problème de la puissance du continu.

.1.3 Méthodes de construction

Il existe plusieurs méthodes pour construire les nombres réels à partir de l'ensemble des rationnels, des entiers ou par des méthodes purement axiomatiques.

Nous donnons ci-dessous un certain nombre de ces méthodes que nous avons regroupées selon des critères parfaitement arbitraires, il aurait, sans aucun doute, été plus objectif de regrouper ensemble toutes les méthodes utilisant, de façon plus ou moins explicite, les suites de Cauchy, mais cela aurait pu occulter les différences fondamentales qui existent néanmoins entre ces diverses méthodes (différences mathématiques et/ou différences pédagogiques).

1) Constructions Usuelles.
   i) Construction de Simon Stevin.
   ii) Coupures de Dedekind.
   iii) Suites de Cauchy.
2) Méthodes Axiomatiques.
   i) Axiomatique Usuelle.
   ii) Axiomatique de Tarski.
3) Suites Particulières.
   i) Fractions Continues. (et le Résumé)
   ii) Méthode Générale.
   iii) Série de Engel.
   iv) Séries de Pierce.
   v) Série de Sylvester.
   vi) Séries Alternées de Sylvester.
   vii) Série de Lüroth.
   viii) Séries Alternées de Lüroth.
   ix) Série de Knopfmacher.
   x) Produit de Cantor.
   xi) Produit Alterné de Cantor.
   xii) Produit Négatif de Cantor.
   xiii) Série Binaire.
4) Développement Décimal.
   i) Construction de Rota.
   ii) Autres Méthodes Décimales.
5) A partir de la soustraction.
   i) Construction de de Bruijn à partir de la soustraction.
   ii) Construction de Udding à partir de la soustraction.
6) Constructions à partir d'intervalles rationnels.
   i) Méthode des intervalles rationnels imbriqués.
   ii) Filtres de Cauchy rationnels.
7) Constructions à partir de suites.
   i) Suites non décroissantes de rationnels positifs.
   ii) Méthode à partir de la série harmonique (Shiu).
   iii) Généralisation de la méthode de Shiu.
8) Autres Constructions.
   i) Quasi-endomorphismes.
   ii) Méthode de Weierstrass.
   iii) Variation sur les coupures de Dedekind.
   iv) Complétion de MacNeille.
   v) Construction à base de Recouvrements.
   vi) Construction à partir des Nombres Surréels.
   vii) Construction à partir des Nombres Hyperrationnels.

.1.4 Constructions Usuelles.

Nous avons regroupé sous ce nom les trois méthodes de construction des réels que l'on voit au lycée.

Construction de Simon Stevin

> ≪ *Qu'il n'y a aucun nombres absurdes, irrationels, irreguliers, inexplicables, ou sourds. C'est chose très vulgaire entre les auteurs d'arithmétique de traiter des nombres comme $\sqrt{8}$, & semblables, qu'ils appellent absurdes, irrationels, irréguliers, inexplicables, sourds, etc. Ce que nous nions, à quelque nombre à venir.* ≫
> Simon Stevin [5]

La construction de Simon Stevin, un mathématicien belge (1548 - 1620) ou construction informelle consiste à considérer les nombres comme une suite finie de chiffres à gauche de la virgule et une suite éventuellement infinie de ≪ décimales ≫ ; on sait que les rationnels sont les nombres dont la suite des décimales est soit finie soit périodique, les réels sont obtenus lorsque l'on ne pose aucune condition sur les décimales sauf que cette suite ne doit pas être stationnaire égal à 9 à partir d'un certain rang (afin d'éviter les développements impropres).

Cette construction peut être formalisée (et étendue a toutes les bases de numération) :

Soit $p \in \mathbb{N}$ nous noterons $\mathfrak{U}^p$ l'ensemble des suites $(\mathfrak{U}^p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (autrement dit de nombres entiers entre 0 et $p-1$ compris), qui ne soit pas stationnaire égale à $(p-1)$ à partir d'un certain rang).

On définit $\mathbb{R} = \{(m, (\mathfrak{U}^p_n)_{n\in\mathbb{N}}) \,|\, m \in \mathbb{Z} \wedge (\mathfrak{U}^p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{U}^p\}$

C'est à dire $x \in \mathbb{R} \left(x = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{\mathfrak{U}^p_i}{p^i} \right)$.

Par exemple $\overline{175,3541}^{10} = (-2, (1,7,5,3,5,4,1,\underline{0})) = \frac{1}{10^{-2}} + \frac{7}{10^{-1}} + \frac{5}{10^0} + \frac{3}{10^1} + \frac{5}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{1}{10^4}$

La définition informelle a l'avantage d'être intuitive, et sa version formalisée semble combler le manque de rigueur, malheureusement, avec cette définition, il n'est pas facile de donner des définition de l'addition et de la multiplication (à cause de la gestion de la retenue), aussi cette définition n'est-elle jamais réellement utilisée (sauf à des fins pédagogiques au collège et sans approfondissement), voir néanmoins les développements décimaux.

Pour se convaincre de la difficulté de la définition des opérations à partir du développement décimal, il n'est que de calculer $1.\underline{2} \times 0.\underline{81}$ [6] en n'utilisant que le développement décimal.

Coupures de Dedekind

On appelle Coupure de Dedekind, toute partition de $\mathbb{Q}$ en deux ensembles A^- et A^+ vérifiant :

1. $A^- \cup A^+ = \mathbb{Q}$ (puisqu'il s'agit d'une partition)
2. $A^- \cap A^+ = \varnothing$ (puisqu'il s'agit d'une partition)
3. $A^- \neq \varnothing$
4. $A^+ \neq \varnothing$
5. $\forall x \forall y((x \in A^- \wedge y \in A^+) \Rightarrow (x < y))$

Il va de soi qu'une coupure est entièrement définie par l'un de ces deux ensembles.

Il est immédiat de constater que tout nombre rationnel q définit deux coupures :

$A^- = \{x \,|\, x \in \mathbb{Q} \wedge x < q\}$ ou $A^- = \{x \,|\, x \in \mathbb{Q} \wedge x \leq q\}$ pour éviter ce petit souci, certains auteurs ajoute une condition à la définition d'une coupure : A^- ne possède pas de plus grand élément, ce qui permet de n'avoir qu'une seule coupure par nombre rationnel.

5. L'arithmétique de Simon Stevin de Bruges (1585).
6. Exemple dû à D. Fowler dans l'article ≪ Dedekind's theorem : $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ≫, American Mathematical Monthly, Volume 99, N° 8, p. 725–733, 1992

On peut constater que certaines coupures ne sont pas définies par un nombre rationnel, par exemple : $A^- = \{x \,|\, (x \leq 0) \vee (x^2 < 2)\}$

D'où la définition : $\mathbb{R}$ est l'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$; bien sûr, il faut définir un ordre, une addition et une multiplication sur cet ensemble.

Si X^-, Y^- et Z^- sont des coupures définissant les nombres réels x, y et z, alors, par définition :

$$x < y \Leftrightarrow X^- \subsetneq Y^-$$

.

$$x + y = z \Leftrightarrow Z^- = \{\alpha + \beta \,|\, \alpha \in X^- \wedge \beta \in Y^-\}$$

Si x et y sont positifs, on peut définir leur produit (les autres cas sont définis par application de la règle des signes) :

$$x \times y = z \Leftrightarrow Z^+ = \{\alpha \times \beta \,|\, \alpha \in X^+ \wedge \beta \in Y^+\}$$

Avec ces définitions, $(\mathbb{R}, +, \times, <)$ est un corps ordonné, complet dans le sens où, si on calcule des coupures à partir de ce nouvel ensemble, on ne fabrique aucun nouvel élément.

Suites de Cauchy

Une suite de rationnels est une application : $u : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$, il est d'usage de noter u_n plutôt que $u(n)$ l'image de n par u.

Une suite de terme général u_n est dite convergente de limite ℓ et on note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{+\star}\, \exists \eta \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, (n > \eta \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

Cette définition présente un gros inconvénient : pour appliquer la définition, il faut connaître la limite.

Une première idée, pour trouver un critère de convergence, est de vérifier que la différence entre deux images successives devient infiniment petite, malheureusement ce n'est pas suffisant, par exemple la suite ci-dessous devient infiniment grande [7] :

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}$$

Cauchy imagina de « compléter » cette première idée en étudiant non la différence entre deux termes consécutifs, mais entre deux termes quelconques au-delà d'une certaine valeur de la variable : une suite est dite « de Cauchy » si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{+\star}\, \exists \eta \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N}\, (((n > \eta) \wedge (m > \eta)) \Rightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon)$$

Dans cette nouvelle définition, la limite ℓ n'intervient plus, malheureusement ce n'est toujours pas suffisant : une suite de Cauchy n'est pas forcément convergente (dans $\mathbb{Q}$), par exemple :

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$$

Ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ [8], par contre elle est bornée, comme toutes les suites de Cauchy.

Il est immédiat de montrer que l'ensemble des suites de rationnels, noté $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, peut être très naturellement muni de relations :

Une addition	$\forall u \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\ \forall v \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\ \forall w \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\ ((w = u + v) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, (w_n = u_n + v_n))$
Une multiplication	$\forall u \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\ \forall v \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\ \forall w \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\ ((w = u \cdot v) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, (w_n = u_n \cdot v_n))$
Une relation d'ordre	$\forall u \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\ \forall v \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\ (u < v) \Leftrightarrow \exists \eta\, \forall n \in \mathbb{N}\, (n > \eta \Rightarrow u_n < v_n))$

On peut vérifier simplement que $(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ est un anneau commutatif, par contre $<$ n'est pas une relation d'ordre, mais $\leq$ est une relation de pré-ordre.

Soit $\mathfrak{C}$ l'ensemble des suites Cauchy, comme $\mathfrak{C} \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{C}$ hérite des relations ci-dessus, et même $(\mathfrak{C}, +, \times)$ est un sous-anneau (la démonstration est aisé en utilisant le fait que les suites de Cauchy sont bornées).

7. C'est la suite des sommes partielles de la série harmonique.
8. Sa limite dans $\mathbb{R}$ est e.

Soit $\mathfrak{Z}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{C}$ constitué des suites convergeant vers 0. $\mathfrak{Z}$ est un idéal de $(\mathfrak{C}, +, \times)$ (là encore la démonstration assez simple utilise le fait que les suites de Cauchy sont bornées).

$\mathfrak{Z}$ est même un idéal maximal [9] (de $\mathfrak{C}$) d'où on déduit que $(\mathfrak{C}/\mathfrak{Z}, +, \times)$ est un corps qui sera noté $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Il va de soi que les suites constantes égales à un rationnel sont de Cauchy, et que l'application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathfrak{C}/\mathfrak{Z}$ qui a un nombre rationnel fait correspondre la suite constante égale à ce rationnel, est injective (trivial) ce qui permet de plonger naturellement $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

.1.5 Méthodes Axiomatiques.

Les méthodes axiomatiques ne sont pas, au sens strict des méthodes de constructions, mais elles restent néanmoins très intéressantes, car dans le cas des réels, les axiomatiques sont catégoriques, c'est à dire ne possèdent qu'un seul modèle, à isomorphisme près.

Il est important de noter que ces axiomatiques sont du second ordre, on peut légitimement se demander si une axiomatique du premier ordre est possible : la réponse est non !

On peut même montrer qu'il existe un modèle élémentairement équivalent à $(\mathbb{R}, +, \times, <)$ (donc dans ce langage) mais qui n'est pas archimédien [10] alors que $\mathbb{R}$ l'est.

Axiomatique Usuelle

Dans les propositions ci-dessous, les lettres minuscules x, y, z, t représentent des éléments de $\mathbb{R}$ et les majuscules X, Y représentent des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

1) $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps commutatif, totalement ordonné (c'est donc un corps réel, cf. infra).
   a) $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien.
   b) $(\mathbb{R}^\star, \times)$ est un groupe abélien.
   c) $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ordre total
   d) $\leq$ est compatible avec les opérations $+$ et $\times$.
      i) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (((x \leq y) \Rightarrow (((x+z) \leq (y+z)) \wedge ((z+x) \leq (z+y))))$
      ii) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (((x \leq y) \wedge (0 \leq z)) \Rightarrow (((x \times z) \leq (y \times z)) \wedge ((z \times x) \leq (z \times y))))$
2) Tout sous-ensemble X majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (pas forcément dans X).
   $\forall X\, \exists y\, \forall x\, \forall z\, \exists t((((X \neq \varnothing) \wedge (x \in X)) \Rightarrow (x \leq y)) \wedge ((z < y) \Rightarrow ((t \in X) \wedge (z < t))))$
3) $\mathbb{R}$ est archimédien [11].
   $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}\, \forall y \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N}\, (nx > y)$

Tous les modèles de cette axiomatique sont isomorphes, c'est d'ailleurs cette propriété qui sert, dans de très nombreux cas, pour montrer qu'une construction particulière donne bien $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$.

Axiomatique de Tarski

Alfred Tarski a mis au point (dans *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*) deux systèmes d'axiomes.

Dans les propositions ci-dessous, les lettres minuscules v, w, x, y, z représentent des éléments de $\mathbb{R}$ et les majuscules X, Y représentent des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Système 1

Axiome 1 : $\forall x\, \forall y\, ((x \neq y) \Rightarrow ((x < y) \vee (y < x)))$

Axiome 2 : $\forall x\, \forall y\, (x < y \Rightarrow \neg(y < x))$

Axiome 3 : $\forall x\, \forall y\, \exists z\, (x < y \Rightarrow ((x < z) \wedge (z < y)))$

Axiome 4 : $\forall X\, \forall Y\, \forall x\, \forall y\, ((((x \in X) \wedge (y \in Y)) \Rightarrow (x < y)) \Rightarrow$
$\exists z\, \forall v\, \forall w\, (((v \in X) \wedge (w \in Y)) \Rightarrow ((v \leq z) \wedge (z \leq w))))$

Axiome 5 : $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x + (y + z) = (x + z) + y)$

9. Si $\mathfrak{Z}$ contenait une suite ne convergeant pas vers 0, $\mathfrak{Z}$ contiendrait une suite jamais nulle et donc toutes les suites de Cauchy.
10. Cette propriété n'est donc pas du premier ordre.
11. Cette propriété est souvent citée, mais n'est pas nécessaire comme axiome puisque démontrable à partir des autres.

Axiome 6 : $\forall x \, \forall y \, \exists z \, (x + z = y)$

Axiome 7 : $\forall w \, \forall x \, \forall y \, \forall z \, ((x + y) < (z + w)) \Rightarrow ((x < z) \vee (y < w)))$

Axiome 8 : $1 \in \mathbb{R}$

Axiome 9 : $1 < 1 + 1$

Tarski a démontré que cette axiomatique permettait de définir une multiplication, compatible avec la relation d'ordre.

Tout modèle de cette axiomatique est isomorphe à $(\mathbb{R}, +, \times, <)$.

Système 2

$$\begin{array}{rl}
\text{Axiome } 1: & \forall x \, \forall y \, ((x \neq y) \Rightarrow ((x < y) \vee (y < x))) \\
\text{Axiome } 2: & \forall x \, \forall y \, (x < y \Rightarrow \neg(y < x)) \\
\text{Axiome } 3: & \forall x \, \forall y \, \exists z \, (((x < y) \wedge (y < z)) \Rightarrow (x < z)) \\
\text{Axiome } 4: & \forall X \, \forall Y \, \forall x \, \forall y \, ((((x \in X) \wedge (y \in Y)) \Rightarrow (x < y)) \Rightarrow \\
& \exists z \, \forall v \, \forall w \, (((v \in X) \wedge (w \in Y)) \Rightarrow ((v \leq z) \wedge (z \leq w)))) \\
\text{Axiome } 5: & \forall x \, \forall y \, \exists z \, (x + y = z) \\
\text{Axiome } 6: & \forall x \, \forall y \, (x + y = y + x) \\
\text{Axiome } 7: & \forall x \, \forall y \, \forall z \, (x + (y + z) = (x + y) + z) \\
\text{Axiome } 8: & \forall x \, \forall y \, \exists z \, (x = y + z) \\
\text{Axiome } 9: & \forall x \, \forall y \, \forall z \, ((y < z) \Rightarrow (x + y < x + z)) \\
\text{Axiome } 10: & 0 \in \mathbb{R} \\
\text{Axiome } 11: & \forall x \, (x + 0 = x) \\
\text{Axiome } 12: & \forall x \, \forall y \, \exists z \, (x \cdot y = z) \\
\text{Axiome } 13: & \forall x \, \forall y \, (x \cdot y = y \cdot x \\
\text{Axiome } 14: & \forall x \, \forall y \, \forall z \, (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z) \\
\text{Axiome } 15: & \forall x \, \forall y \, \exists z \, ((y \neq 0) \Rightarrow x = y \cdot z \\
\text{Axiome } 16: & \forall x \, \forall y \, \forall z \, (((0 < x) \wedge (y < z)) \Rightarrow (x \cdot y < x \cdot z)) \\
\text{Axiome } 17: & \forall x \, \forall y \, \forall z \, (x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)) \\
\text{Axiome } 18: & 1 \in \mathbb{R} \\
\text{Axiome } 19: & \forall x \, (x \cdot 1 = x) \\
\text{Axiome } 20: & 0 \neq 1
\end{array}$$

Tarski a montré que les systèmes 1 et 2 sont équivalents ; le sens $2 \Rightarrow 1$ est facile, mais le sens $1 \Rightarrow 2$ est très difficile.

.1.6 Suites Particulières.

Les méthodes suivantes sont toutes basées sur la même idée qui consiste à définir des suites (qui de facto sont de Cauchy) particulières de telle sorte que l'on puisse définir les réels non comme des classes d'équivalence de suites de Cauchy, mais directement comme une suite d'entiers possédant quelques propriétés spécifiques et qui peut donc être vue comme une suite formelle.

Nous commencerons par donner un exemple particulièrement intéressant, celui des fractions continues, puis une méthode générale, enfin plusieurs exemples d'application de cette méthode avec des suites plus ou moins connues.

Fractions Continues.

L'idée des fractions continues prend sa source dans l'algorithme de calcul du plus grand diviseur commun d'Euclide, un mathématicien grec (environ -325 à -265), mais l'histoire commence réellement avec Rafael Bombelli (1526 - 1572) et Pietro Antonio Cataldi (1548 - 1626), deux mathématiciens italiens ; par la suite elles furent très étudiées par Leonhard Paul Euler (1707 - 1783), un mathématicien suisse, Jean Henri Lambert (1728 - 1777), un mathématicien français (de Mulhouse, ce qui fait qu'on le trouve parfois sous le nom Johann Heinrich Lambert) et Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), un mathématicien italo-français.

Une fraction continue simple [12] finie est une fraction de la forme :

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

12. Comme nous ne considérerons que des fractions continues simples, nous omettrons systématiquement cette précision.

où $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $\bigwedge_{i=1}^{n} a_i \in \mathbb{N}$.

Il est évident qu'une fraction continue finie est un nombre rationnel, mais on peut aussi montrer assez facilement qu'un nombre rationnel peut se mettre sous la forme d'une fraction continue, pour un nombre relatif, c'est évident $(n = a_0)$:

Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ un nombre rationnel, comme $\mathbb{Z}$ est un anneau euclidien, on peut trouver $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $r_0 \in]0; q[$ tels que $p = a_0 q + r_0$, ce qui peut s'écrire $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q}$, ou encore $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\left(\frac{q}{r_0}\right)}$. Si $r_0 | q$ [13], alors $a_1 = \frac{q}{r_0}$ et $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1}$, et la démonstration est terminée, sinon, il existe $a_1 \in \mathbb{N}$ et $r_1 \in]0; r_0[$ tels que $q = a_1 r_0 + r_1$, et on recommence. La suite (r_i) étant décroissante dans $\mathbb{N}$, elle se termine forcément en 0, ce qui achève la démonstration.

Il peut apparaître de peu d'utilité de transformer une fraction simple en une fraction continue, mais heureusement on peut aller plus loin, et on peut montrer que tous les nombres réels peuvent s'écrire sous forme de fractions continues (possiblement infinies), prenons d'abord un exemple :

$$\pi = 3.14159265358979\ldots$$

$$\pi = 3 + 0.14159265358979\ldots \qquad \text{ce qui donne une approximation bien connue : } \quad \pi \approx 3$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0.14159265358979\ldots}}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7,06251330593105\ldots}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + 0.06251330593105\ldots} \qquad \text{ce qui donne une approximation bien connue : } \quad \pi \approx \frac{22}{7}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0.06251330593105\ldots}}}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15.9965944066841\ldots}}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + 0.9965944066841\ldots}} \qquad \text{ce qui donne une approximation bien connue : } \quad \pi \approx \frac{333}{106}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0.9965944066841\ldots}}}}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1,003417231015\ldots}}}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} \qquad \text{ce qui donne une approximation bien connue : } \quad \pi \approx \frac{355}{113}.$$

Montrons que tout réel peut s'écrire comme une fraction continue :

Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $a_0 = \lfloor x \rfloor$ et $x_1 = x - a_0$, on peut écrire $x = a_0 + x_1$, où $0 \leq x_1 < 1$ si $x_1 = 0$, la démonstration est terminée, sinon $\frac{1}{x_1} > 1$.

13. $r_0 | q$ se lit : r_0 divise q

En posant $a_1 = \left\lfloor \dfrac{1}{x_1} \right\rfloor$ et $x_2 = \dfrac{1}{x_1} - a_1$ nous pouvons écrire : $\dfrac{1}{x_1} = a_1 + x_2$ ou encore $x = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + x_2}$, où $0 \leq x_2 < 1$, si $x_2 = 0$, la démonstration est terminée, sinon $\dfrac{1}{x_2} > 1$.

En posant $a_2 = \left\lfloor \dfrac{1}{x_2} \right\rfloor$ et $x_3 = \dfrac{1}{x_2} - a_2$ nous pouvons écrire : $\dfrac{1}{x_2} = a_2 + x_3$ ou encore $x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + x_3}}$, où $0 \leq x_3 < 1$, si $x_3 = 0$, la démonstration est terminée, sinon $\dfrac{1}{x_3} > 1$.

etc.

Pour résumer l'algorithme (à chaque étape si $x_i = 0$, l'algorithme est terminé) :

$a_0 = \lfloor x \rfloor$	$x_1 = x - a_0$	$x = a_0 + x_1$	$0 \leq x_1 < 1$	$x = a_0 + x_1$
$a_1 = \left\lfloor \dfrac{1}{x_1} \right\rfloor$	$x_2 = \dfrac{1}{x_1} - a_1$	$\dfrac{1}{x_1} = a_1 + x_2$	$0 \leq x_2 < 1$	$x = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + x_2}$
$a_2 = \left\lfloor \dfrac{1}{x_2} \right\rfloor$	$x_3 = \dfrac{1}{x_2} - a_2$	$\dfrac{1}{x_2} = a_2 + x_3$	$0 \leq x_3 < 1$	$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + x_3}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_n = \left\lfloor \dfrac{1}{x_n} \right\rfloor$	$x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n} - a_n$	$\dfrac{1}{x_n} = a_n + x_{n+1}$	$0 \leq x_{n+1} < 1$	$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + x_{n+1}}}}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

On pose $u_n = a_0 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}$

Il ne reste plus qu'à montrer que cette suite est convergente :

On peut facilement montrer que la sous suite u_{2n} est croissante et la sous-suite u_{2n+1} est décroissante, on peut aussi montrer (c'est un peu moins simple) que $\lim\limits_{m \to \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ ce qui établit la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il existe quelques cas particuliers intéressants :

$\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$ Ce qui peut s'écrire $\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$ $\left(\phi \text{ est solution de } x = 1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$ Ce qui peut s'écrire $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ $\left(\sqrt{2} \text{ est solution de } x = 1 + \dfrac{1}{1+x}\right)$.

On peut d'ailleurs montrer (sans grande difficulté) que les fractions continues périodiques à partir d'un certain rang correspondent exactement aux nombres quadratiques [14] non rationnels.

Il est d'usage de noter les fractions continues finies sous la forme $\langle a_0, a_1, \cdots, a_n \rangle$, les fractions continues infinies sous la forme $\langle a_0, a_1, \cdots \rangle$, et dans le cas particulier des fractions continues infinies périodiques à partir d'un certain rang, on utilise la même convention que dans les développements décimaux :

14. C'est à dire les solutions d'équations entières du second degré.

$$\begin{aligned}
\frac{7}{4} &= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}} = \langle 1,1,3\rangle \\
\pi &= \langle 3,7,15,1,\cdots\rangle \\
\phi &= \langle \overline{1}\rangle \\
\sqrt{2} &= \langle 1,\overline{2}\rangle \\
x &= \langle a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\overline{a_{n+1},a_{n+2},\cdots,a_{n+m}}\rangle \quad \text{Pour } x \text{ quadratique.}
\end{aligned}$$

On peut donc construire les réels comme l'ensemble des suites finies ou non de la forme $\langle a_0,a_1,\cdots\rangle$ où $a_0\in\mathbb{Z}$ et $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} a_i\in\mathbb{N}$ et $\langle a_0,a_1,\cdots,a_n,1\rangle$ est remplacé par $\langle a_0,a_1,\cdots,a_n+1\rangle$.

On vérifie aisément que si $a=\langle a_0,a_1,a_2,\cdots\rangle$, on peut calculer facilement $-a$ et a^{-1} (si $a\neq 0$)

$$\text{Pour le calcul de l'opposé : }\begin{cases} a_1=1\Rightarrow -a= & \langle -a_0-1,1+a_2,a_3,\cdots\rangle \\ a_1>1\Rightarrow -a= & \langle -a_0-1,1,a_1-1,a_2,a_3,\cdots\rangle \end{cases}$$

La démonstration des deux cas, qui sont symétriques, se fait en une seule étape : on doit montrer que

$$a_0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots}}}}+(-a_0-1)+\cfrac{1}{1+a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots}}}=0$$

Ce qui peut s'écrire : $-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{X}}+\cfrac{1}{1+X}$ dont on vérifie facilement que c'est égal à 0.

$$\text{Pour le calcul de l'inverse}(a\neq 0) : \begin{cases} a_0=0\Rightarrow a^{-1}= & \langle a_1,a_2,a_3,\cdots\rangle \\ a_0>0\Rightarrow a^{-1}= & \langle 0,a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots\rangle \\ a_0<0\Rightarrow a^{-1}= & -(-a)^{-1} \end{cases}$$

La démonstration des deux premier cas, qui sont symétriques, se fait en une seule étape : on doit montrer que

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots}}\times\left(a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots}\right)=1$$

Ce qui peut s'écrire $\dfrac{1}{X}\times X$, qui est trivialement égal à 1.

On peut représenter les fractions rationnelles sous la forme d'une suite d'entiers, finie ou infinie, que nous écrirons : $a=\langle a_0,a_1,\cdots a_n\cdots\rangle$, mais sous cette forme nous sommes obligés de traiter différemment les fractions rationnelles finies (correspondant à des suites finies et donc à des rationnels), et les fractions rationnelles infinies (correspondant à des suites infinies et donc des irrationnels).

Georg Johann Rieger, un mathématicien allemand (1931 -) dans un article de 1982 eut l'idée très fructueuse de considérer ces suites sous la forme suivante :

Soit ω un élément plus grand que tout entier $(\forall n\in\mathbb{N}\ (\omega>n))$, on écrit une fraction rationnelle sous la forme d'une suite **toujours** infinie $a=\langle a_0,a_1,\cdots a_n\cdots\rangle$ vérifiant les conditions suivantes :

- $a_0\in\mathbb{Z}\wedge\forall n\in\mathbb{N}^\star(a_n\in\mathbb{N}^\star\bigcup\{\omega\}$
- $\forall\eta\in\mathbb{N}\,\forall n\in\mathbb{N}\,(((a_\eta=\omega)\wedge(n>\eta))\Rightarrow(a_n=\omega))$ C'est à dire que ω apparaît toujours sous la forme $\overline{\omega}$.
- $\forall n\in\mathbb{N}^\star((a_n=1)\Rightarrow(a_{n+1}\neq\omega))$

Nous noterons $\mathfrak{S}$ l'ensemble de ces suites.

$\mathfrak{S}$ peut être muni d'une relation d'ordre totale compatible avec l'ordre sur $\mathbb{Q}$:

Soit $a \in \mathfrak{S}$ et $b \in \mathfrak{S}$, nous noterons η_a^b, le plus petit indice pour lequel les termes des suites a et b sont différents (c'est à dire que $\forall n(((n < \eta_a^b) \Rightarrow (a_n = b_n)) \wedge (a_{\eta_a^b} \neq b_{\eta_a^b})))$.

$$a < b \Leftrightarrow \begin{cases} (\eta_a^b \in 2\mathbb{N}) & \wedge \quad (a_{\eta_a^b} < b_{\eta_a^b}) \\ & \vee \\ (\eta_a^b \in 2\mathbb{N}+1) & \wedge \quad (a_{\eta_a^b} > b_{\eta_a^b}) \end{cases}$$

Muni de cette relation d'ordre nous pouvons montrer que pour toute partie majorée $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{S}$, il existe une borne supérieure dans $\mathfrak{S}$:

Soit $\sigma_0 = \sup\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}} (\alpha_0)$, cette borne supérieure existe et est atteinte puisque $\mathfrak{M}$ est bornée.

On pose $\mathfrak{M}_0 = \{\alpha \in \mathfrak{M} \mid \alpha_0 = \sigma_0\}$ qui n'est donc pas vide.

Soit $\sigma_1 = \inf\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}_0} (\alpha_1)$, cette borne inférieure existe et est atteinte puisque, par construction, l'ensemble des α_1 est minoré par 1.

On pose $\mathfrak{M}_1 = \{\alpha \in \mathfrak{M}_0 \mid \alpha_1 = \sigma_1\}$ qui n'est donc pas vide.

Pour $n > 0$, soit :

$$\sigma_{2n} = \sup_{\alpha \in \mathfrak{M}_{2n-1}} (\alpha_{2n}) \begin{cases} \sigma_{2n} \in \mathbb{N}^\star & \text{cette borne supérieure est atteinte, on pose } \mathfrak{M}_{2n} = \{\alpha \in \mathfrak{M}_0 \mid \alpha_{2n} = \sigma_{2n}\} \\ \quad \vee & \\ \sigma_{2n} = \omega & \text{atteint ou non, on pose : } \sigma = \langle \sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{2n-1}, \overline{\omega} \rangle, \text{et on arrête le calcul.} \end{cases}$$

Pour $n > 0$, soit $\sigma_{2n+1} = \inf\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}_{2n+1}} (\alpha_{2n+1})$, cette borne inférieure existe et est atteinte puisque l'ensemble des α_{2n+1} est minoré par 1.

On pose $\mathfrak{M}_{2n+1} = \{\alpha \in \mathfrak{M}_{2n} \mid \alpha_{2n+1} = \sigma_{2n+1}\}$ et on continue les calculs.

Alors $\sigma = \langle \sigma_0, \sigma_1, \ldots \rangle$ est la borne supérieure de $\mathfrak{M}$. Le seul problème qui peut éventuellement se poser c'est que le suite obtenue ne vérifie pas les conditions pour appartenir à $\mathfrak{S}$, et plus précisément, il est possible que $\sigma = \langle \sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_n, 1, \overline{\omega} \rangle$ [15] mais dans ce cas, il suffit de remplacer cette suite par $\sigma = \langle \sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_n + 1, \overline{\omega} \rangle$.

$(\mathfrak{M}, <)$ est donc un ensemble totalement ordonné possédant la propriété de la borne supérieure, il ne reste plus qu'à le munir d'une addition et d'une multiplication adéquates pour obtenir $\mathbb{R}$.

Soit $\alpha \in \mathfrak{S}$, on note $\alpha^{(n)} = \langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \overline{\omega} \rangle$, $\widehat{\alpha^{(n)}}$ le nombre rationnel auquel correspond $\alpha^{(n)}$, et $\langle [q] \rangle$ la suite (finie) correspondant au nombre rationnel q.

Néanmoins, au lieu d'écrire, par exemple, $\langle [\widehat{\alpha^{(2n)}} + \widehat{\beta^{(2n)}}] \rangle$, nous écrirons plus simplement $\alpha^{(2n)} + \beta^{(2n)}$, dans la mesure où il n'y a pas d'ambiguïté.

Ceci permet de définir l'addition et la multiplication sur $\mathfrak{S}$ [16] :

$$\alpha + \beta = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\alpha^{(2n)} + \beta^{(2n)} \right).$$

$$\begin{cases} (\alpha \geq 0) \wedge (\beta \geq 0) & \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left(\alpha^{(2n)} \cdot \beta^{(2n)} \right) \\ (\alpha \geq 0) \wedge (\beta \leq 0) & \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta = -\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left(\alpha^{(2n)} \cdot (-\beta)^{(2n)} \right) \\ (\alpha \leq 0) \wedge (\beta \geq 0) & \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta = -\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left((-\alpha)^{(2n)} \cdot \beta^{(2n)} \right) \\ (\alpha \leq 0) \wedge (\beta \leq 0) & \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left((-\alpha)^{(2n)} \cdot (-\beta)^{(2n)} \right) \end{cases}$$

On ne prend en compte que les suites de la forme $\alpha^{(2n)}$, car l'application $n \mapsto \alpha^{(2n)}$ est croissante (et tend donc vers sa limite par valeur inférieure).

15. Comme pour un développement décimal standard, nous notons $\overline{\sigma}$ pour indiquer que σ se répète indéfiniment à partir d'un certain rang ; ceci est valable aussi pour $\overline{\omega}$.
16. Ne pas oublier que $\alpha^{(2n)}$ et $\beta^{(2n)}$ sont des rationnels dont on sait calculer la somme.

Avec ces définitions, on peut montrer que $(\mathfrak{S}, +, \times, <)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, +, \times, <)$ (on a déjà montré la propriété de la borne supérieure).

La commutativité et l'associativité des deux opérations, ainsi que la distributivité de la multiplication sur l'addition se démontrent facilement à l'aide de ces mêmes propriétés dans $\mathbb{Q}$, il est très simple de montrer que $\langle 0, \overline{\varpi} \rangle$, et $\langle 1, \overline{\varpi} \rangle$ sont les éléments neutres, quant aux inverses ils ont été calculés précédemment.

Méthode Générale

Soit $\mathfrak{S} = \{a = \langle a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\rangle\}$ un ensemble de suites infinies possédant les propriétés suivantes :

1. $a_0 \in \mathbb{Z} \wedge \left(\bigwedge_{i\in\mathbb{N}^\star} a_i \in \mathbb{N} \bigcup \{\omega\}\right)$, où ω est plus grand que tous les entiers.
2. $\forall i \in \mathbb{N} \forall j \in \mathbb{N} (((a_i = \omega) \wedge (j > i)) \Rightarrow (a_j = \omega))$
3. Soit $a \in \mathfrak{S}$, nous noterons $a^{(n)} = \langle a_0, a_1, \cdots, a_n, \omega, \cdots, \omega, \cdots\rangle$.
4. $\forall a \in \mathfrak{S} \forall n \in \mathbb{N} \left(a^{(n)} \in \mathfrak{S}\right)$. Autrement dit, tous les segments initiaux de suites de $\mathfrak{S}$ sont dans $\mathfrak{S}$.
5. Il existe une suite que nous noterons $\widehat{a} = (\widehat{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que :
   i) $\widehat{a}_0 = a_0$
   ii) $\widehat{a}_n = \varphi(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Autrement dit, $\widehat{a}_n$ ne dépend que des a_i précédents
   iii) $a_n = \omega \Rightarrow \widehat{a}_n = \widehat{a}_{n-1}$
   iv) $\widehat{a}_n \in \mathbb{Q}$.
   v) On pose $\widehat{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{a}_n$, quand celle-ci existe dans $\mathbb{Q}$ [17] (donc en particulier pour les suites finies). On peut remarquer que $\widehat{a}_n = \widehat{a^{(n)}}$
   vi) Pour tout $x \in \mathbb{Q}$ il existe une suite $a \in \mathfrak{S}$ telle que $x = \widehat{a}$.
6. Il existe une famille de relations $(\mathcal{R}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathcal{R}_i \in \{<, >\}$ et telle que l'on peut définir une relation d'ordre sur $\mathfrak{S}$, notée $<$ et vérifiant :

$$a < b \Leftrightarrow \exists \eta \in \mathbb{N} \forall i \in \mathbb{N}((i < \eta) \Rightarrow (((a_i = b_i) \wedge (a_\eta \neq b_\eta) \wedge (\mathcal{R}_\eta(a_\eta, b_\eta))))).$$

   Par la suite nous noterons η_a^b, le plus petit indice pour lequel les termes des suites a et b sont différents.
7. Pour la relation d'ordre précédente, toute partie bornée $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{S}$ possède une borne supérieure.
8. Il existe une fonction croissante $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ telle que l'application $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$ définie par $n \mapsto a^{(f(n))}$ soit monotone.

Dans la suite de ce document nous utiliserons les notations suivantes :

- $\mathfrak{S}^{<\omega}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{S}$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $a_k = \omega$, on l'appelle ensemble des suites finies.
- $\mathfrak{S}^\sim$ le sous-ensemble de $\mathfrak{S}$ des suites périodiques à partir d'un certain rang (on a donc le sous-ensemble de $\mathfrak{S}^{<\omega} \subset \mathfrak{S}^\sim$.
- $\mathfrak{S}^\delta$ le sous-ensemble de $\mathfrak{S}$ des suites dont les différences entre deux termes consécutifs sont périodiques.

A partir de cet ensemble de suite, on peut définir des opérations, comme pour les fractions continues :

Ceci permet de définir l'addition et la multiplication sur $\mathfrak{S}$ [18] (dans le cas où la fonction f définie ci-dessus est décroissante, il faut prendre le inf à la place du sup) :

$$\alpha + \beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\alpha^{(f(n))} + \beta^{(f(n))}\right).$$

$$\begin{cases} (\alpha \geq 0) \wedge (\beta \geq 0) & \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\alpha^{(f(n))} \cdot \beta^{(f(n))}\right) \\ (\alpha \geq 0) \wedge (\beta \leq 0) & \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta = -\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\alpha^{(f(n))} \cdot (-\beta)^{(f(n))}\right) \\ (\alpha \leq 0) \wedge (\beta \geq 0) & \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta = -\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left((-\alpha)^{(f(n))} \cdot \beta^{(f(n))}\right) \\ (\alpha \leq 0) \wedge (\beta \leq 0) & \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left((-\alpha)^{(f(n))} \cdot (-\beta)^{(f(n))}\right) \end{cases}$$

Comme pour les fractions continues, les propriétés de commutativité, d'associativité, et la distributivité sont évidentes, les éléments neutres sont $(0, \overline{\omega})$ et $(1, \overline{\omega})$.

17. La notion de limite se définit très bien dans $\mathbb{Q}$.
18. Ne pas oublier que $\widehat{\alpha^{(f(n))}}$ et $\widehat{\beta^{(f(n))}}$ sont des rationnels dont on sait calculer la somme et le produit.

Par contre, les inverses, contrairement aux fractions continues ne sont pas toujours faciles à exprimer, nous allons donc donner une formule générale :

$$-\alpha = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left((-\alpha)^{(f(n))}\right).$$

$$\begin{cases} (\alpha > 0) & \Rightarrow \quad \alpha^{-1} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{(f(n))}\right) \\ (\alpha < 0) & \Rightarrow \quad \alpha^{-1} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{(f(n))}\right) \end{cases}$$

Remarque : avec les notations vues dans la partie sur les fractions rationnelles, il faut comprendre que $(-\alpha)^{(f(n))} = [-(\widehat{\alpha^{(f(n))}})]$ c'est à dire qu'à partir de la suite α, on calcule le rationnel qui correspond à la sous-suite qui s'arrête en $f(n)$, on prend l'opposé de ce rationnel, qui est bien évidemment un rationnel, et on construit la suite (finie ou non) qui correspond à ce rationnel, $\left(\text{et similairement pour } \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{(f(n))}\right)$.

Une remarque importante : la démonstration de la propriété de la borne supérieure se fait comme pour les fractions continues, à l'aide de la fonction f et des relations $(\mathcal{R}_i)$.

Les pages qui suivent donnent des exemples pour lesquels on peut appliquer cette méthode générale, ce sont donc autant de méthodes pour construire l'ensemble des nombres Réels.

Certains des exemples ci-dessous ne permettent de générer que $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^{\star+}$), mais ce n'est en rien un problème dans la mesure où fabriquer $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^{\star+}$) est aussi facile que de passer de $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{N}^\star$) à $\mathbb{Z}$.

Le calcul des termes successifs des expansions usuelles des nombres réels nécessite d'effectuer les opérations avec beaucoup de décimales, par exemples l'utilisation d'un tableur d'une marque bien connue (bien pratique pourtant pour ce genre de calculs), ne donne que 15 décimales, un développement en langage C standard n'en fourni que 17 ce qui est très, très insuffisant, l'utilisation d'une base de données (avec récursion) permet d'obtenir 38 décimales ce qui est déjà beaucoup mieux, une solution qui semble prometteuse est le développement en langage C avec une librairie spécialisée du genre GMP, mais même dans ce cas, il existe toujours un risque lors des calculs de $\lceil x \rceil$ ou de $\lfloor x \rfloor$; idéalement, il ne faudrait faire les calculs qu'avec des entiers.

A titre l'exemple, page 31 du document *Normal Numbers With Respect to the Cantor Series Expansion* [19] il est indiqué que l'expansion en série de Sylvester de π, commence par :

$$\pi = 3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{61} + \frac{1}{5020} + \frac{1}{128541347} + \cdots$$

ce qui est faux [20] (un calcul manuel montre que la somme de ces 5 termes est supérieure à π), les calculs fait avec ORACLE donne

$$\pi = 3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{61} + \frac{1}{5020} + \frac{1}{128541455} + \cdots.$$

Dans la partie *Exemples* des Suites ci-dessous, la première colonne est la valeur exacte, littérale, d'une constante, la deuxième est le début du développement de cette constante, et, dans le cas des séries infinies, ou finies mais trop longues, la troisième colonne est le début du développement décimal donné par l'expansion de la suite, les décimales restituées sont les décimales correctes de la constante, ce qui donne une idée de la vitesse de convergence de la Série (ou Produit).

Dans les Séries ci-dessous, nous appelons « Constante Primaire », ou plus simplement « Primaire », la constante obtenue en affectant la plus petite valeur possible à chacun des éléments a_i des différentes suites, en respectant les conditions, et en ajoutant 1 si l'application systématique du minimum conduit à une forme simplifiable.

Par exemple pour la série de Engel, l'application des conditions donnerait $\langle 0, 2, 2, 2, 2, \overline{2}\rangle$, mais cette forme se simplifie, le Primaire est donc, dans ce cas $\langle 0, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots\rangle$.

Lorsque la constante Primaire est donnée uniquement sous forme d'un développement décimale, c'est que l'inverseur de Plouffe [21] n'a pas permis d'en déterminer une valeur littérale.

19. Partie d'une thèse pour un Ph. D. à « The Ohio State University ».
20. Il manque aussi le $\dfrac{1}{61}$, mais je mets cet oubli sur le compte d'une erreur de copie, dans la mesure où ce terme est nécessaire pour le calcul du terme suivant.
21. L'inverseur de Plouffe.

Le formalisme utilisé ici n'est pas universel, par exemple pour le développement en série de Engel de π, on trouve, dans la littérature $\pi = \langle 1, 1, 1, 8, 8, 17, 19, 300, 1991 \cdots \rangle$, alors qu'ici nous noterons : $\pi = \langle 3, 8, 8, 17, 19, 300, 1991 \cdots \rangle$, ce qui rend les comparaisons beaucoup plus simple.

Fractions Continues (Résumé)

Historique : L'histoire des fractions continues commence avec Rafael Bombelli (1526 - 1572) et Pietro Antonio Cataldi (1548 - 1626), et les travaux continuent encore aujourd'hui.

Définition : $$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n \cdots}}}}$$

Conditions : $a_0 \in \mathbb{Z} \wedge \left(\bigwedge_{i \in \mathbb{N}^\star} a_i \in \mathbb{N}^\star \bigcup \{\omega\} \right)$

$\langle a_0, a_1, \cdots, a_n, 1, \overline{\omega} \rangle = \langle a_0, a_1, \cdots, a_n + 1, \overline{\omega} \rangle$

$(a_k = \omega) \Rightarrow (a_{k+1} = \omega)$

Algorithme :

	$a_0 = \lfloor x \rfloor$	$x_1 = x - a_0$
$x_i = 0 \Rightarrow$	$a_i = \omega$	$x_{i+1} = 0$
$x_i \neq 0 \Rightarrow$	$a_i = \left\lfloor \frac{1}{x_i} \right\rfloor$	$x_{i+1} = \frac{1}{x_1} - a_i$

Ordre : $a < b \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_a^b \in 2\mathbb{N} \wedge a_{\eta_a^b} < b_{\eta_a^b} \\ \eta_a^b \notin 2\mathbb{N} \wedge a_{\eta_a^b} > b_{\eta_a^b} \end{cases}$

Fonction $\nearrow$: $f(n) = 2n$

Unicité : La décomposition d'un réel strictement positif en Fraction Continue existe et est unique.

Inverse :
$a_0 = 0 \Rightarrow a^{-1} = \langle a_1, a_2, a_3, \cdots \rangle$
$a_0 > 0 \Rightarrow a^{-1} = \langle 0, a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots \rangle$
$a_0 < 0 \Rightarrow a^{-1} = -(-a)^{-1}$

Rationnels : $\widehat{\mathfrak{S}^{<\omega}} = \mathbb{Q}$

Exemples : $\frac{25}{29} = \langle 0, 1, 6, 4, \overline{\omega} \rangle$

: $\pi = \langle 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \cdots \rangle = 3{,}14159265361894\ldots$

: $e = \langle 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, \cdots \rangle = 2{,}71830985915493\ldots$

: $\sqrt{2} = \langle 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \overline{2} \rangle = 1{,}41421568627451\ldots$

: $\varphi = \langle 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \overline{1} \rangle = 1{,}61818181818182\ldots$

: $n > 0 \Rightarrow \langle n, \overline{2n} \rangle = \sqrt{n^2 + 1}$

Primaire : $e - 1 = \langle 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \overline{1} \rangle = 0{,}61818181818182\ldots$

Série de Engel.

Historique	:	Le développement des réels en Série de Engel a été étudié en 1913 par Friedrich Engel, un mathématicien allemand (1861 - 1941), mais le premier à avoir envisagé cette série est Jean-Henri Lambert un mathématicien français (1728 - 1777).
Définition	:	$a_0 + \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_1 a_2} + \dfrac{1}{a_1 a_2 a_3} + \cdots + \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i}\right) + \cdots$
Conditions	:	$a_0 \in \mathbb{Z} \wedge \left(\displaystyle\bigwedge_{i \in \mathbb{N}^\star} a_i \in \mathbb{N}^\star \bigcup \{\omega\}\right)$
	:	$\forall n \in \mathbb{N}^\star (a_{n+1} \geq a_n > 1)$
	:	$\exists \eta > 1\, (a_{\eta-1} < a_\eta) \Rightarrow \langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\eta-1}, \overline{a_\eta}\rangle = \langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\eta-1}, a_\eta - 1, \overline{\omega}\rangle$
	:	$\langle a_0, \overline{2}\rangle = \langle a_0 + 1, \overline{\omega}\rangle$
	:	$a_1 > 2 \Rightarrow \langle a_0, \overline{a_1}\rangle = \langle a_0, a_1 - 1, \overline{\omega}\rangle$

Algorithme :

		a_0	$=$	$\lfloor x \rfloor$	x_1	$=$	$x - a_0$
$x_i = 0$	$\Rightarrow$	a_i	$=$	ω	x_{i+1}	$=$	0
$x_i \neq 0$	$\Rightarrow$	a_i	$=$	$\left\lceil \dfrac{1}{x_i} \right\rceil$	x_{i+1}	$=$	$a_i \cdot x_i - 1$

Ordre : $a < b \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_a^b = 0 & \wedge \quad a_0 < b_0 \\ \eta_a^b \neq 0 & \wedge \quad a_{\eta_a^b} > b_{\eta_a^b} \end{cases}$

Fonction $\nearrow$: $f(n) = n$

Unicité : La décomposition d'un réel en Série de Engel est unique.

Rationnels : $\widehat{\mathfrak{S}^{<\omega}} = \mathbb{Q}$

Exemples	:	$\dfrac{25}{29}$	$=$	$\langle 0, 2, 2, 3, 3, \overline{30}\rangle = \langle 0, 2, 2, 3, 3, 29, \overline{\omega}\rangle$		
	:	π	$=$	$\langle 3, 8, 8, 17, 19, 300, 1991, 2492 \cdots\rangle$	$=$	3,14159265358979...
	:	e	$=$	$\langle 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots\rangle$	$=$	2,71828180114638...
	:	$\sqrt{2}$	$=$	$\langle 1, 3, 5, 5, 16, 18, 78, \cdots\rangle$	$=$	1,41421355650522...
	:	φ	$=$	$\langle 1, 2, 5, 6, 13, 16, 16, \cdots\rangle$	$=$	1,61803385416667...
	:	$\cosh(1)$	$=$	$\langle 1, 2, 12, 30, \cdots, 2k(2k-1), \cdots\rangle$	$=$	1,54305555555556...
	:	$n > 0$	$\Rightarrow$	$\langle 1, n, 2n, 3n, 4n, \cdots\rangle$	$=$	$e^{\frac{1}{n}}$
Primaire	:	$e - 2$	$=$	$\langle 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots\rangle$	$=$	0,71828180114638...

Série de Pierce.

Historique : Le développement des réels en Série de Pierce a été étudié en 1929 par T. A. Pierce, mais le premier à avoir envisagé cette série (en 1911) est Wacław Franciszek Sierpiński un mathématicien polonais (1882 - 1969).
Ces séries ont été étudiées par John et Arnold Knopfmacher à partir de 1988.
On trouve parfois le nom de *Série Alternée de Engel.*

Définition : $a_0 + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3}, \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right) \cdots$

Conditions : $a_0 \in \mathbb{Z} \wedge \left(\bigwedge_{i \in \mathbb{N}^\star} a_i \in \mathbb{N}^\star \bigcup \{\omega\} \right)$
: $\forall n \in \mathbb{N}^\star (a_{n+1} > a_n > 1)$
: Pour $\eta > 0$: $\langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\eta-1}, a_\eta, a_\eta + 1, \overline{\omega} \rangle = \langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\eta-1}, a_\eta + 1, \overline{\omega} \rangle$

Algorithme :

	$a_0 = \lfloor x \rfloor$	$x_1 = x - a_0$
$x_i = 0 \Rightarrow$	$a_i = \omega$	$x_{i+1} = 0$
$x_i \neq 0 \Rightarrow$	$a_i = \left\lfloor \frac{1}{x_i} \right\rfloor$	$x_{i+1} = \left(\frac{1}{a_i} - x_i \right) \cdot a_i$

Ordre : $a < b \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_a^b \in 2\mathbb{N} \wedge a_{\eta_a^b} < b_{\eta_a^b} \\ \eta_a^b \notin 2\mathbb{N} \wedge a_{\eta_a^b} > b_{\eta_a^b} \end{cases}$

Fonction $\nearrow$: $f(n) = 2n$

Unicité : La décomposition d'un réel en Série de Pierce est unique.

Opposé : $a = \langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \rangle \Leftrightarrow -a = \langle -a_0 - 1, 1, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \cdots \rangle$ (si $a_1 \neq 1$)
: $a = \langle a_0, 1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \rangle \Leftrightarrow -a = \langle -a_0 - 1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \cdots \rangle$

Rationnels : $\widehat{\mathfrak{S}^{<\omega}} = \mathbb{Q}$

Exemples : $\frac{25}{29} = \langle 0, 1, 7, 28, 29, \overline{\omega} \rangle = \langle 0, 1, 7, 29, \overline{\omega} \rangle$
: $\pi = \langle 3, 7, 112, 115, 157, 372, 432 \cdots \rangle = 3{,}14159265358979\ldots$
: $e = \langle 2, 1, 3, 6, 14, 142, 327, 398, \cdots \rangle = 2{,}718281828459088\ldots$
: $\sqrt{2} = \langle 1, 2, 5, 7, 197, 199 \cdots \rangle = 1{,}41421356237314\ldots$
: $\varphi = \langle 1, 1, 2, 4, 17, 19, 5777, 5779, \cdots \rangle = 1{,}61803398874989\ldots$
: $n > 0 \Rightarrow \langle 1, n, 2n, 3n, 4n, \cdots \rangle = 1 - e^{\frac{-1}{n}}$

Primaire : $e^{-1} = \langle 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots \rangle = 0{,}36787946428571\ldots$

Série de Sylvester.

Historique	:	Le développement des réels en Série de Sylvester a été étudié en 1880 par James Joseph Sylvester, un mathématicien anglais (1814 - 1897). Ces séries ont été étudiées par John et Arnold Knopfmacher à partir de 1988.
Définition	:	$a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \cdots$
Conditions	:	$a_0 \in \mathbb{Z} \wedge \left(\bigwedge_{i \in \mathbb{N}^\star} a_i \in \mathbb{N}^\star \bigcup \{\omega\} \right)$
	:	$\forall n \in \mathbb{N}^\star((a_{n+1} \geq a_n^2 - a_n + 1) \wedge (a_n > 1))$
	:	$\langle a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_{n-1}, \overline{a_n} \rangle = \langle a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} - 1, \overline{\omega} \rangle$
	:	$\exists \eta \in \mathbb{N}^\star \, \forall n \in \mathbb{N}((n \geq \eta > 1) \Rightarrow (a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1) \Rightarrow$ $(\langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\eta-1}, a_\eta, a_{\eta+1}, \cdots \rangle = \langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\eta-1}, a_\eta - 1, \overline{\omega} \rangle)$ $\langle a_0, 2, 3, 7, 43, \cdots, (a_n^2 - a_n + 1), \cdots \rangle = \langle a_0 + 1, \overline{\omega} \rangle$ Pour $a_1 > 2$: $\langle a_0, a_1, (a_1^2 - a_1 + 1), \cdots, (a_n^2 - a_n + 1), \cdots \rangle = \langle a_0, a_1 - 1, \overline{\omega} \rangle$
Commentaire		C'est une forme particulière de fraction égyptienne.

Algorithme :

		a_0	$=$	$\lfloor x \rfloor$	x_1	$=$	$x - a_0$
$x_i = 0$	$\Rightarrow$	a_i	$=$	ω	x_{i+1}	$=$	0
$x_i \neq 0$	$\Rightarrow$	a_i	$=$	$\left\lceil \frac{1}{x_i} \right\rceil$	x_{i+1}	$=$	$x_i - \frac{1}{a_i}$

Ordre	:	$a < b \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_a^b = 0 \wedge a_0 < b_0 \\ \eta_a^b \neq 0 \wedge a_{\eta_a^b} > b_{\eta_a^b} \end{cases}$
Fonction $\nearrow$	:	$f(n) = n$
Unicité	:	La décomposition d'un réel en Série de Sylvester est unique.
Rationnels	:	$\widehat{\mathfrak{S}^{<\omega}} = \mathbb{Q}$

Exemples	:	$\frac{25}{29}$	$=$	$\langle 0, 2, 3, 35, 6090, \overline{\omega} \rangle$		
	:	π	$=$	$\langle 3, 8, 61, 5020, 128541455, \cdots \rangle$	$=$	3,14159265358979...
	:	e	$=$	$\langle 2, 2, 5, 55, 9999, 3620211523, \cdots \rangle$	$=$	2,71828182845905...
	:	$\sqrt{2}$	$=$	$\langle 1, 3, 13, 253, 218201, 61323543802, \cdots \rangle$	$=$	1,41421356237309...
	:	φ	$=$	$\langle 1, 2, 9, 145, 37986, 2345721887, \cdots \rangle$	$=$	1,61803398874990...
	:	$n > 1$	$\Rightarrow$	$\langle 1, n, n^2, n^3, n^4, \cdots \rangle$	$=$	$\frac{n}{n-1}$
Primaire	:	?	$=$	$\langle 0, 2, 4, 14, 184, 33674, 1133904604, \cdots \rangle$	$=$	0,82689305142092...

Série Alternée de Sylvester.

Historique : Le développement des réels en Série Alternée de Sylvester ont été étudiées par John et Arnold Knopfmacher à partir de 1988.

Définition : $a_0 + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}, \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{a_n} \cdots$

Conditions : $a_0 \in \mathbb{Z} \wedge \left(\bigwedge_{i \in \mathbb{N}^\star} a_i \in \mathbb{N}^\star \bigcup \{\omega\} \right)$

: $\forall n \in \mathbb{N}^\star ((a_{n+1} \geq a_n(a_n+1)) \wedge (a_n \geq 1))$

: $\langle a_0, a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, a_n, a_n(a_n+1), \overline{\omega} \rangle = \langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n+1, \overline{\omega} \rangle$

Algorithme :

	$a_0 = \lfloor x \rfloor$	$x_1 = x - a_0$
$x_i = 0 \Rightarrow$	$a_i = \omega$	$x_{i+1} = 0$
$x_i \neq 0 \Rightarrow$	$a_i = \left\lfloor \frac{1}{x_i} \right\rfloor$	$x_{i+1} = \left(\frac{1}{a_i} - x_i \right)$

Ordre : $a < b \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_a^b \in 2\mathbb{N} \wedge a_{\eta_a^b} < b_{\eta_a^b} \\ \eta_a^b \notin 2\mathbb{N} \wedge a_{\eta_a^b} > b_{\eta_a^b} \end{cases}$

Fonction $\nearrow$: $f(n) = 2n$

Unicité : La décomposition d'un réel en Série de Sylvester Alternée est unique.

Opposé : $a = \langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \rangle \Leftrightarrow -a = \langle -a_0 - 1, 1, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \cdots \rangle$ (si $a_1 \neq 1$)

: $a = \langle a_0, 1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \rangle \Leftrightarrow -a = \langle -a_0 - 1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \cdots \rangle$

Rationnels : $\widehat{\mathfrak{S}^{<\omega}} = \mathbb{Q}$

Exemples : $\frac{25}{29} = \langle 0, 1, 7, 202, 41006, \overline{\omega} \rangle = \langle 0, 1, 7, 203, \overline{\omega} \rangle$: $(41006 = 202 \times 203)$

: $\pi = \langle 3, 7, 790, 749896, \cdots \rangle = 3{,}14159265359058\ldots$

: $e = \langle 2, 1, 3, 19, 983, 1140455, \cdots \rangle = 2{,}71828182845908\ldots$

: $\sqrt{2} = \langle 1, 2, 11, 195, 180120, \cdots \rangle = 1{,}41421356236479\ldots$

: $\varphi = \langle 1, 1, 2, 8, 143, 37042, 1563518960, \cdots \rangle = 1{,}61803398874989\ldots$

: $n > 1 \Rightarrow \langle 1, n, n^2, n^3, n^4, \cdots \rangle = \frac{n+2}{n+1}$

Primaire : $? = \langle 1, 1, 2, 6, 42, 1806, 3263442, \cdots \rangle = 1{,}64341054628824\ldots$

Série de Lüroth.

Historique : Le développement des réels en Série de Lüroth ont été introduites en 1883 par Jacob Lüroth, un mathématicien allemand (1844 - 1910).

Définition : $a_0 + \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_1(a_1-1)a_2} + \cdots + \left(\prod_{i=1}^{n-1} \dfrac{1}{a_i(a_i-1)}\right)\dfrac{1}{a_n} + \cdots$

Conditions : $a_0 \in \mathbb{Z} \wedge \left(\bigwedge_{i\in\mathbb{N}^\star} a_i \in \mathbb{N}^\star \bigcup \{\omega\}\right)$

: $\forall n \in \mathbb{N}^\star (a_n > 1)$

Algorithme :

	$a_0 = \lfloor x \rfloor$	$x_1 = x - a_0$
$x_i = 0 \Rightarrow$	$a_i = \omega$	$x_{i+1} = 0$
$x_i \neq 0 \Rightarrow$	$a_i = \left\lceil \dfrac{1}{x_i} \right\rceil$	$x_{i+1} = (a_i - 1)\cdot(a_i x_i - 1)$

Ordre : $a < b \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_a^b = 0 \wedge a_0 < b_0 \\ \eta_a^b \neq 0 \wedge a_{\eta_a^b} > b_{\eta_a^b} \end{cases}$

Fonction $\nearrow$: $f(n) = n$

Unicité : La décomposition d'un réel en Série de Lüroth est unique.

Rationnels : $\widehat{\mathfrak{S}^\sim} = \mathbb{Q}$

Exemples : $\dfrac{25}{29} = \langle 0, 2, \overline{2, 3, 2, 3, 4, 4}\rangle$

: $\pi = \langle 3, 8, 2, 2, 2, 3, 2, 5, 24, \cdots\rangle = 3{,}1415926494295\!6\ldots$

: $e = \langle 2, 2, 3, 2, 5, 2, 2, 10, \cdots\rangle = 2{,}718281250000000\ldots$

: $\sqrt{2} = \langle 1, 3, 3, 2, 2, 2, 4, 2, \cdots\rangle = 1{,}41420717592593\ldots$

: $\varphi = \langle 1, 2, 5, 2, 3, 2, 4, 2, \cdots\rangle = 1{,}61801215277778\ldots$

: $n > 1 \Rightarrow \langle 0, \overline{n}\rangle = \dfrac{n-1}{n^2 - n - 1}$

Primaire : $1 = \langle 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \cdots\rangle = 0{,}99218750000000\ldots$

Série Alternée de Lüroth.

Historique : Le développement des réels en Série Alternée de Lüroth ont été étudiées par John et Arnold Knopfmacher à partir de 1988.
Ces séries ont aussi été étudiées par Chryssoula Ganatsiou, une mathématicienne grecque à partir de 2000.

Définition : $a_0 + \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{(a_1+1)a_1a_2} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n-1} \dfrac{1}{a_i(a_i+1)} \right) \dfrac{1}{a_n} + \cdots$

Conditions : $a_0 \in \mathbb{Z} \wedge \left(\bigwedge_{i \in \mathbb{N}^\star} a_i \in \mathbb{N}^\star \bigcup \{\omega\} \right)$

: $\forall n \in \mathbb{N}^\star (a_n \geq 1)$
Pour $\eta > 0$: $\langle a_0, a_1, a_{\eta-1}, a_\eta, 1, \overline{\omega} \rangle = \langle a_0, a_1, a_{\eta-1}, a_\eta + 1, \overline{\omega} \rangle$

Algorithme :

	$a_0 = \lfloor x \rfloor$	$x_1 = x - a_0$
$x_i = 0 \Rightarrow$	$a_i = \omega$	$x_{i+1} = 0$
$x_i \neq 0 \Rightarrow$	$a_i = \left\lfloor \dfrac{1}{x_i} \right\rfloor$	$x_{i+1} = (a_i+1)(1 - x_i a_i)$

Ordre : $a < b \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_a^b \in 2\mathbb{N} \quad \wedge \quad a_{\eta_a^b} < b_{\eta_a^b} \\ \eta_a^b \notin 2\mathbb{N} \quad \wedge \quad a_{\eta_a^b} > b_{\eta_a^b} \end{cases}$

Fonction $\nearrow$: $f(n) = 2n$

Unicité : La décomposition d'un réel en Série Alternée de Lüroth est unique.

Rationnels : $\widehat{\mathfrak{S}}^{\sim} = \mathbb{Q}$

Exemples : $\dfrac{25}{29} = \langle 0, 1, 3, \overline{1, 1, 1, 2, 9} \rangle$

: $\pi = \langle 3, 7, 14, 7, 1, 1, 1, 15, \cdots \rangle = 3{,}14159265417476\ldots$

: $e = \langle 2, 1, 1, 1, 3, 1, 11, 7, 2, 4, 12, 3, \cdots \rangle = 2{,}71828182846181\ldots$

: $\sqrt{2} = \langle 1, 2, 1, 1, 16, 1, 36, 15, \cdots \rangle = 1{,}41421356252085\ldots$

: $\varphi = \langle 1, 1, 1, 2, 5, 1, 32, 4, 1, \cdots \rangle = 1{,}61803398569024\ldots$

: $n \geq 1 \Rightarrow \langle 0, \overline{n} \rangle = \dfrac{n+1}{n^2+n+1}$

Primaire : $\dfrac{2}{3} = \langle 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots \rangle = 0{,}66406250000000\ldots$

Série de Knopfmacher.

Historique : Le développement des réels en série de Knopfmacher a été étudié à partir de 1989 par John Peter Louis Knopfmacher, un mathématicien sud-africain (1937 - 1999), et son fils Arnold Knopfmacher (1961 -), qui lui avaient donné le nom de « Série Alternée de Engel Modifiée ». Ils ont travaillé aussi sur ce sujet avec une mathématicienne grecque, Sofia Kalpazidou.

Définition : $a_0 + \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{(a_1+1)a_2} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n-1} \dfrac{1}{(a_i+1)}\right) \dfrac{1}{a_n} + \cdots$

Conditions : $a_0 \in \mathbb{Z} \wedge \left(\bigwedge_{i \in \mathbb{N}^\star} a_i \in \mathbb{N}^\star \bigcup \{\omega\}\right)$

: $\forall n \in \mathbb{N}^\star (a_{n+1} \geq a_n \geq 1)$

Pour $\eta > 0$: $\langle a_0, a_1, a_{\eta-1}, a_\eta, a_\eta, \overline{\omega}\rangle = \langle a_0, a_1, a_{\eta-1}, a_\eta + 1, \overline{\omega}\rangle$

Algorithme :

	$a_0 = \lfloor x \rfloor$	$x_1 = x - a_0$
$x_i = 0 \Rightarrow$	$a_i = \omega$	$x_{i+1} = 0$
$x_i \neq 0 \Rightarrow$	$a_i = \left\lfloor \dfrac{1}{x_i} \right\rfloor$	$x_{i+1} = \left(\dfrac{1}{a_i} - x_i\right)(a_i+1)$

Ordre : $a < b \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_a^b \in 2\mathbb{N} \wedge a_{\eta_a^b} < b_{\eta_a^b} \\ \eta_a^b \notin 2\mathbb{N} \wedge a_{\eta_a^b} > b_{\eta_a^b} \end{cases}$

Fonction $\nearrow$: $f(n) = 2n$

Unicité : La décomposition d'un réel en Série de Knopfmacher est unique.

Rationnels : $\widehat{\mathfrak{S}^{\sim}} \subsetneq \mathbb{Q}$

Exemples :

$\dfrac{25}{29} = \langle 0, 1, 3, 4, 9, 9, 17, 41, 481, \cdots\rangle = 0{,}86206896551686\ldots$

$\pi = \langle 3, 7, 98, 114, 200, 331, 349, 549, \cdots\rangle = 3{,}14159265358979\ldots$

$e = \langle 2, 1, 1, 1, 3, 3, 16, 22, 25, 38, \cdots\rangle = 2{,}71828182877820\ldots$

$\sqrt{2} = \langle 1, 2, 3, 3, 8, 15, 44, 109, 1396, \cdots\rangle = 1{,}41421356237309\ldots$

$\varphi = \langle 1, 1, 1, 2, 11, 11, 26, 31, 1794, \cdots\rangle = 1{,}61803398874972\ldots$

$n \geq 1 \Rightarrow \langle 0, \overline{n}\rangle = \dfrac{n+1}{n^2+2n}$

$n \geq 2 \Rightarrow \langle 0, n, 2n-1, 2n^2-1, 2(2n^2-1)-1, \cdots\rangle = \dfrac{2}{2n+1}$

Primaire : $\dfrac{2}{3} = \langle 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots\rangle = 0{,}66406250000000\ldots$

Le pénultième exemple montre qu'il existe des nombres rationnels dont le développement en série de Knopfmacher n'est pas périodique.

La définition complète de cet exemple est : $\begin{cases} a_0 & = 0 \\ a_1 & = n \geq 2 \\ a_{2k} & = 2a_{2k-1} - 1 \\ a_{2k+1} & = 2a_{2k-1}^2 - 1 \end{cases}$

Produit de Cantor.

Historique : Le développement des réels en produit de Cantor a été étudié à partir de 1869 par Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, un mathématicien allemand (1845 - 1918).

Définition : $\frac{1}{a_0} \cdot \left(1+\frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{a_3}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1+\frac{1}{a_n}\right) \cdot \cdots$

Conditions : $a_0 \in \mathbb{N}^\star \wedge \left(\bigwedge_{i\in\mathbb{N}^\star} a_i \in \mathbb{N}^\star \bigcup \{\omega\}\right)$

: $\forall n \in \mathbb{N}^\star (a_{n+1} \geq a_n^2 \geq 1)$

: $\exists \eta \forall n ((n \geq \eta) \Rightarrow (a_n > 1))$

: $(a_1 = 1) \Rightarrow (a_0 \notin 2\mathbb{N})$

: $\exists \eta \in \mathbb{N}^\star \forall n \in \mathbb{N} ((n \geq \eta > 1) \Rightarrow (a_{n+1} = a_n^2) \Rightarrow$
$(\langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\eta-1}, a_\eta, a_{\eta+1}, \cdots\rangle = \langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\eta-1}, a_\eta - 1, \overline{\omega}\rangle)$

Algorithme :

	$a_0 = \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil$	$x_1 = a_0 \cdot x$
$x_i = 1 \Rightarrow$	$a_i = \omega$	$x_{i+1} = 0$
$x_i \neq 1 \Rightarrow$	$a_i = \left\lfloor \frac{x_i}{x_i - 1} \right\rfloor$	$x_{i+1} = \dfrac{x_i}{1+\frac{1}{a_i}}$

Ordre : $a < b \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_a^b = 0 \wedge a_{\eta_a^b} > b_{\eta_a^b} \\ \eta_a^b \neq 0 \wedge a_{\eta_a^b} > b_{\eta_a^b} \end{cases}$

Fonction $\nearrow$: $f(n) = n$

Unicité : La décomposition d'un réel strictement positif en Produit de Cantor est unique.

Rationnels : $\widehat{\mathfrak{S}^{<\omega}} = \mathbb{Q}$

Exemples : $\frac{25}{29} = \langle 2, 2, 7, 175, 30625, \cdots\rangle = \langle 2, 2, 7, 174, \overline{\omega}\rangle$

: $\pi = \langle 1, 1, 2, 22, 600, 1800856, \cdots\rangle = 3{,}14159265358959\ldots$

: $e = \langle 1, 1, 3, 52, 8160, 95179273, \cdots\rangle = 2{,}71828182845905\ldots$

: $\sqrt{2} = \langle 1, 3, 17, 577, 665857, 886731088897, \cdots\rangle = 1{,}41421356238745\ldots$

: $\varphi = \langle 1, 2, 13, 610, 1346269, 6557470319842, \cdots\rangle = 1{,}61803398874990\ldots$

: $n > 1 \Rightarrow \langle 1, n, 2n^2 - 1, 2(2n^2-1)^2 - 1, \cdots\rangle = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$

Primaire : $? = \langle 1, 2, 5, 26, 677, 458330, \cdots\rangle = 1{,}87199590348696\ldots$

Produit Alterné de Cantor

Historique	:	Le développement des réels en Produit Alterné de Cantor a été étudié à partir de 1989 par John Peter Louis Knopfmacher, un mathématicien sud-africain (1937 - 1999), et son fils Arnold Knopfmacher (1961 -).
Définition	:	$2^{a_0}\left(1+\dfrac{1}{a_1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{a_2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{a_3}\right)\cdot\ \cdots\ \cdot\left(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{a_n}\right)\cdots$
Conditions	:	$a_0\in\mathbb{Z}\wedge\left(\bigwedge_{i\in\mathbb{N}^\star}a_i\in\mathbb{N}^\star\bigcup\{\omega\}\right)$
	:	$\forall n\in\mathbb{N}^\star(a_{n+1}\geq(a_n+1)\cdot(a_n+(-1)^{n-1})$
		$\langle a_0,a_1,\cdots,a_{2\eta-1},a_{2\eta},a_{2\eta}^2-1,\overline{\omega}\rangle=\langle a_0,a_1,\cdots,a_{2\eta-1},a_{2\eta}+1,\overline{\omega}\rangle$
		$\langle a_0,a_1,\cdots,a_{2\eta},a_{2\eta+1},(a_{2\eta+1}+1)^2,\overline{\omega}\rangle=\langle a_0,a_1,\cdots,a_{2\eta},a_{2\eta+1}+1,\overline{\omega}\rangle$
	:	$x\in\mathbb{R}^{+\star}$

Algorithme :

		a_0	$=$	$\lfloor\log_2(x)\rfloor$	x_1	$=$	$\dfrac{x}{2^{a_0}}$
$x_i=1$	$\Rightarrow$	a_i	$=$	ω	x_{i+1}	$=$	1
$x_i\neq 1$	$\Rightarrow$	a_i	$=$	$\left\lfloor\dfrac{(-1)^{i-1}}{x_i-1}\right\rfloor$	x_{i+1}	$=$	$\dfrac{x_i}{1+\dfrac{(-1)^{i-1}}{a_i}}$

Ordre : $a\ <\ b\Leftrightarrow\begin{cases}\eta_a^b\in 2\mathbb{N}\quad\wedge\quad a_{\eta_a^b}\ <\ b_{\eta_a^b}\\ \eta_a^b\notin 2\mathbb{N}\quad\wedge\quad a_{\eta_a^b}\ >\ b_{\eta_a^b}\end{cases}$

Fonction $\nearrow$	:	$f(n)=2n$
Unicité	:	La décomposition d'un réel strictement positif en Produit Alterné de Cantor existe et est unique.
Inverse	:	$a\ =\langle a_0\ ,1\ ,a_2\ ,\cdots,a_{2n-1}\ ,a_{2n}\ ,a_{2n+1}\ ,\cdots\rangle\Leftrightarrow$
		$a^{-1}=\langle -a_0-1,\ a_2-1,\ a_3+1,\ \cdots,\ a_{2n}-1,\ a_{2n+1}+1,\ a_{2n+2}-1,\ \cdots\rangle$
Rationnels	:	$\widehat{\mathfrak{S}^{<\omega}}\quad=\quad\mathbb{Q}$

Exemples	:	$\dfrac{25}{29}$	$=$	$\langle -1,1,7,174,\overline{\omega}\rangle$		
	:	π	$=$	$\langle 1,1,4,21,2485,12983006,\cdots\rangle$	$=$	3,14159265358981...
	:	e	$=$	$\langle 1,2,10,147,31786,1122846592,\cdots\rangle$	$=$	2,71828182845905...
	:	$\sqrt{2}$	$=$	$\langle 0,2,17,576,665857,886731088896,\cdots\rangle$	$=$	1,41421356237309...
	:	φ	$=$	$\langle 0,1,5,88,10946,433494436,\cdots\rangle$	$=$	1,61803398874990...
	:	$n>0$	$\Rightarrow$	$\langle 1,n,2(n+1)^2-1,\cdots\rangle$	$=$	$\sqrt{\dfrac{n+2}{n}}$
Primaire	:	?	$=$	$\langle 0,1,5,25,677,458329,\cdots\rangle$	$=$	1,66154572270595...

La définition complète du pénultième exemple est : $\begin{cases}a_0 &=0\\ a_1 &=n\geq 0\\ a_{2k} &=2(a_{2k-1}+1)^2-1\\ a_{2k+1} &=2a_{2k}^2-2\end{cases}$

Produit Négatif de Cantor.

Historique : Une définition de ce produit infini fut donnée par Vincent Granville en 2010, mais avec une définition très insuffisante ; la définition utilisée ci-dessous, ainsi que les démonstrations sont de l'auteur de ce document.

Définition : $2^{a_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{a_1}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2}\right)\left(1 - \frac{1}{a_3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{a_n}\right)\cdots$

Conditions : $a_0 \in \mathbb{Z} \wedge \left(\bigwedge_{i\in\mathbb{N}^\star} a_i \in \mathbb{N}^\star \bigcup \{\omega\}\right)$

: $\forall n \in \mathbb{N}^\star\ ((a_n > 2) \wedge (a_{n+1} > (a_n - 1)^2))$

: $\exists \eta \in \mathbb{N}^\star\ \forall n \in \mathbb{N}((n > \eta > 1) \Rightarrow (a_{n+1} = (a_n - 1)^2 + 1)) \Rightarrow$
$(\langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\eta-1}, a_\eta, a_{\eta+1}, \cdots\rangle = \langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\eta-1}, a_\eta - 1, \overline{\omega}\rangle)$
$\langle a_0, 3, 5, 17, \cdots, (a_n - 1)^2 + 1, \cdots\rangle = \langle a_0 - 1, \overline{\omega}\rangle$
Pour $a_1 > 3$: $\langle a_0, a_1, (a_1 - 1)^2 + 1, \cdots, (a_n - 1)^2 + 1, \cdots\rangle = \langle a_0, a_1 - 1, \overline{\omega}\rangle$

Algorithme :

	$a_0 = \lceil \log_2(x) \rceil$	$x_1 = \dfrac{x}{2^{a_0}}$
$x_i = 1 \Rightarrow$	$a_i = \omega$	$x_{i+1} = 0$
$x_i \neq 1 \Rightarrow$	$a_i = \left\lceil \dfrac{1}{1 - x_i} \right\rceil$	$x_{i+1} = \dfrac{x_i}{\left(1 - \frac{1}{a_i}\right)}$

Ordre : $a < b \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_a^b = 0 & \wedge \quad a_{\eta_a^b} < b_{\eta_a^b} \\ \eta_a^b \neq 0 & \wedge \quad a_{\eta_a^b} < b_{\eta_a^b} \end{cases}$

Fonction $\searrow$: $f(n) = n$

Unicité : La décomposition d'un réel strictement positif en Produit Négatif de Cantor existe et est unique.

Rationnels : $\widehat{\mathfrak{S}^{<\omega}} = \mathbb{Q}$

Exemples : $\frac{25}{29} = \langle 0, 8, 68, 13601, \overline{\omega}\rangle$

: $\pi = \langle 2, 5, 55, 13931, 2811273900\cdots\rangle = 3{,}14159265358979\ldots$

: $e = \langle 2, 4, 11, 304, 138640\cdots\rangle = 2{,}71828182850079\ldots$

: $\sqrt{2} = \langle 1, 4, 18, 578, 665858\cdots\rangle = 1{,}41421356237469\ldots$

: $\varphi = \langle 1, 6, 35, 1598, 3524579, \cdots\rangle = 1{,}61803398874999\ldots$

: $n > 2 \Rightarrow \langle 1, n, 2(n-1)^2, 2(2(n-1)^2 - 1)^2, \cdots\rangle = 2\sqrt{\frac{n-2}{n}}$

Primaire : $? = \langle 0, 3, 6, 27, 678, 458331, \cdots\rangle = 0{,}53418920315867\ldots$

Série Binaire Spéciale.

Définition : $a_0 + \dfrac{1}{2^{a_1}} + \dfrac{1}{2^{a_2}} + \dfrac{1}{2^{a_3}} + \cdots$

Conditions : $a_0 \in \mathbb{Z} \wedge \left(\bigwedge_{i \in \mathbb{N}^\star} a_i \in \mathbb{N}^\star \bigcup \{\omega\} \right)$

: $\forall n \in \mathbb{N}^\star (a_{n+1} > a_n)$

: $\exists \eta \forall n\, ((\eta > 1) \wedge (a_{\eta-1} + 1 < a_\eta) \wedge ((n \geq \eta) \Rightarrow (a_{n+1} = a_n + 1)) \Rightarrow$
$(\langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\eta-1}, a_\eta, a_{\eta+1}, \cdots \rangle = \langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\eta-1}, a_\eta - 1, \varpi \rangle)$
$\langle a_0, 1, 2, 3, 4, \cdots, (a_n + 1), \cdots \rangle = \langle a_0 + 1, \varpi \rangle$
Pour $a_1 > 1$: $\langle a_0, a_1, (a_1 + 1), \cdots, (a_n + 1), \cdots \rangle = \langle a_0, a_1 - 1, \varpi \rangle$

Algorithme :

	$a_0 = \lfloor x \rfloor$	$x_1 = x - a_0$
$x_i = 0 \Rightarrow$	$a_i = \omega$	$x_{i+1} = 0$
$x_i \neq 0 \Rightarrow$	$a_i = \left\lceil \log_2 \left(\dfrac{1}{x_i} \right) \right\rceil$	$x_{i+1} = x_i - \dfrac{1}{2^{a_i}}$

Ordre : $a < b \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_a^b = 0 \quad \wedge \quad a_{\eta_a^b} < b_{\eta_a^b} \\ \eta_a^b \neq 0 \quad \wedge \quad a_{\eta_a^b} > b_{\eta_a^b} \end{cases}$

Fonction $\nearrow$: $f(n) = n$

Unicité : Le développement en Série Binaire Spéciale d'un nombre réel (qui n'est pas exactement le développement en base 2) est unique.

Rationnels : $\widehat{\mathfrak{S}^\delta} = \mathbb{Q}$

Exemples : $\dfrac{25}{29} = \langle 0, 1, 2, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 17, \ldots \rangle = 0{,}86206817626953\ldots$

: $\pi = \langle 3, 3, 6, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, \cdots \rangle = 3{,}14159011840820\ldots$

: $e = \langle 2, 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, \cdots \rangle = 2{,}71679687500000\ldots$

: $\sqrt{2} = \langle 1, 2, 3, 5, 7, 13, 16, \cdots \rangle = 1{,}41419982910156\ldots$

: $\varphi = \langle 1, 1, 4, 5, 6, 7, 11, 12, \cdots \rangle = 1{,}61791992187500\ldots$

: $n > 1 \Rightarrow \langle 0, n, 2n, 3n, \cdots \rangle = \dfrac{1}{2^n - 1}$

: $n > 1 \Rightarrow \langle 1, 1+n, 1+2n, 1+3n, \cdots \rangle = \dfrac{2^{n-1}}{2^n - 1}$

Primaire : $\dfrac{2}{3} = \langle 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 \cdots \rangle = 0{,}66662597656250\ldots$

On peut prolonger cette idée en étudiant d'autres suites, par exemple, Chrysoula Ganatsiou et Perakis Konstantinos ont proposé en 2010 la série

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1} - \left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdot\frac{1}{a_2} + \left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\cdot\frac{1}{a_3} + \cdots + (-1)^{n+1}\cdot\left(\prod_{i=1}^{n-1}\left(1+\frac{(-1)^i}{a_{i-1}}\right)\right)\cdot\frac{1}{a_n} + \cdots$$

On peut aussi envisager l'expansion factorielle :

$$x = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \cdots + \frac{a_n}{n!} + \cdots$$

Par exemple $\pi = \langle 3,0,0,0,3,1,5,6,5,0,1,4,7,8,0,6,7,10,\cdots\rangle$ et, bien sûr, $e = \langle\overline{1}\rangle$

Ou encore la β-expansion :
Soit $\beta > 1$ un réel, $a_0 \in \mathbb{Z}$ et pour a_i des entiers naturels tels que $\forall i((i>0) \Rightarrow (a_i \in \{0,1,\cdots,\lfloor\beta\rfloor\}))$:

$$x = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots$$

Un cas particulier a été particulièrement étudié : $\beta = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Une variation sur le nombre d'or, et qui n'a pas été étudié à ma connaissance :
On note F_n le $n^{\text{ième}}$ nombre de la suite de Fibonacci :

$$x = a_0 + F_0/F_{n_1} + F_{n_1}/F_{n_2} + F_{n_2}/F_{n_3} + ...$$

Qui peut se représenter par la suite $(a_0, n_1, n_2, \cdots)$ où $a_0 \in \mathbb{Z}$ et les $a_i \in \mathbb{N}^\star$.

***f*-Expansion.**

L'idée des f-Expansion fut proposée par Barnard H. Bissinger (un mathématicien américain (1918 - 2011)) en 1944, pas spécifiquement pour mettre au point des méthodes de construction des réels, mais, l'idée peut être exploitée dans ce sens.

Bissinger a remarqué que le développement d'un réel en fractions continues était de la forme :

$$x = a_0 + f(a_1 + f(a_2 + f(a_3 + \cdots)))$$

Avec, dans le cas des fractions continues $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Le travail de Bissinger a été de trouver des conditions sur f pour qu'un développement de la forme ci-dessus existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et soit unique.

1. $f : [1,\infty[\mapsto \mathbb{R}$
2. $f(1) = 1$
3. $\forall x\,\forall y\,((1 \le x < y) \Rightarrow (f(x) > f(y) > 0))$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
5. $\forall x\,\forall y\,((1 \le x < y) \Rightarrow (|\,f(y) - f(x)\,| < |\,y - x\,|)$
6. $\exists\lambda\,\forall x\,\forall y\,((0 < \lambda < 1) \wedge ((1 + f(2) < x < y) \Rightarrow (|\,f(y) - f(x)\,| < \lambda^2|\,y - x\,|)))$

Un tel développement vérifiant en plus que l'image d'un rationnel soit un rationnel, permet, a priori de construire $(\mathbb{R}, +, \times, <)$.

On peut aussi envisager une méthode plus « géométrique » en utilisant l'expansion de János Bolyai (un mathématicien hongrois 1802 - 1860) à l'aide de radicaux imbriqués [22] :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists a_0 \in \mathbb{Z}\ \exists a \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \left(x = a_0 + \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots \sqrt{a_n + \cdots}}}\right)$$

22. On trouve aussi la définition : $\left(x = \sqrt{a_0 - 1 + \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots \sqrt{a_n + \cdots}}}}\right)$ où $a \in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$.

On peut noter quelques cas particuliers (en notant φ, le nombre d'or) : $\varphi^2 = \langle\ \overline{1}\ \rangle$ ou $(n+1)^2 = \langle\overline{n(n+1)}\rangle$.

Cette méthode est assez différente des précédentes dans la mesure où les suites finies ne correspondent pas à des nombres rationnels, ce qui empêche de faire les calculs simplement, néanmoins les suites finies correspondent à des nombres constructibles, on peut donc faire le même genre de construction, mais de façon géométrique, c'est à dire que cette méthode permet de construire les réels avec une règle et un compas (avec une infinité de mouvements, et pour être honnête, toutes les méthdoes à base de suites de rationnels (qui sont constructibles) permettent aussi une contruction géométrique).

Par exemple, on obtient $\pi = \langle 2, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 2, 2, 1, 2, \cdots \rangle$ [23], ce qui explicite un moyen de résoudre la quadrature du cercle (avec une infinité de tracés, et en commençant par le dernier 😎).

23. Avec la forme alternative on aurait trouvé : $\pi = \langle 2, 3, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 2, 1, 0, \cdots \rangle$

.1.7 Développement Décimal.

Construction de Rota.

La construction de Rota est due à Gian-Carlo Rota en 1974, un mathématicien américain (1932 - 1999), elle permet de passer de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{R}$ sans passer par $\mathbb{Q}$. Il s'agit essentiellement d'une méthode basée sur un pseudo-développement binaire [24] d'un nombre, manipulé comme une suite de nombres entiers relatifs.

Soit $\mathfrak{G}\mathfrak{C} = \{\langle \cdots, a_{-n}, \cdots (a_{-2})(a_{-1})(a_0) \cdot (a_1)(a_2) \cdots \rangle\}$ [25] tel qu'en dessous d'un certain rang, tous les a_i sont nuls (autrement dit il n'y a qu'un nombre fini de « chiffres » à gauche de la virgule) :

$$\exists \eta \, \forall i \, ((i < \eta) \Rightarrow (a_i = 0))$$

.

On peut définir très facilement une addition et une multiplication sur $\mathfrak{G}\mathfrak{C}$ (c'est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$) :

On pose $a = \langle a_i \rangle_{i \in \mathbb{Z}}$ et $b = \langle b_i \rangle_{i \in \mathbb{Z}}$.

$a + b = \langle a_i + b_i \rangle_{i \in \mathbb{Z}}$

$a \times b = \left\langle \sum_{j=0}^{i} a_j \cdot b_{i-j} \right\rangle_{i \in \mathbb{Z}}$

Il est immédiat que $(\mathfrak{G}\mathfrak{C}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Il s'agit d'un pseudo développement binaire dans la mesure où l'idée est que $\langle a_i \rangle_{i \in \mathbb{Z}}$ doit représenter le réel $x = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i 2^{-i}$, sauf que les a_i peuvent être n'importe quel entier relatif.

On pose $\mathbb{K} = \langle \cdots (0)(1) \cdot (-2)(0) \cdots \rangle$.

On peut constater immédiatement qu'avec l'interprétation précédente, $\mathbb{K}$ représente $1 + \dfrac{-2}{2}$, c'est à dire 0 (on sent venir un idéal et le quotient qui va avec).

Un élément $a = \langle a_i \rangle_{i \in \mathbb{Z}}$ de $\mathfrak{G}\mathfrak{C}$ est dit borné si :

$$\exists N \in \mathbb{Z} \, \forall n \in \mathbb{Z} \left(\sum_{i \leq n} |a_i| 2^{n-i} \leq N 2^n \right)$$

On remarquera que cette définition ne fait intervenir aucun nombre rationnel qui ne soit un entier relatif.

Nous noterons $\widehat{\mathfrak{G}\mathfrak{C}}$ le sous ensemble de $\mathfrak{G}\mathfrak{C}$ constitué des chaines bornées ($(\widehat{\mathfrak{G}\mathfrak{C}}, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathfrak{G}\mathfrak{C}, +, \times)$).

On définit une relation d'équivalence sur $\widehat{\mathfrak{G}\mathfrak{C}}$:

$$\forall a \, \forall b \, ((a \sim b) \Leftrightarrow \exists c \; (a = b + \mathbb{K}c))$$

Où $\mathbb{K}c$ est bornée et $\forall N \in \mathbb{N} \, \exists \eta \, \forall i \, ((i > \eta) \Rightarrow (N|c_i| \leq 2^i))$

Voici le quotient (et l'idéal principal) dont il était question plus haut ; $\mathbb{K}c$ est appelé « Chaîne de retenues » (Carry-string en anglais).

Une première remarque [26] :

- $\langle (0) \cdot \overline{(1)} \rangle$ est bornée.
- $\langle (1) \cdot \overline{(1)} \rangle$ est bornée.
- $\mathbb{K} \times \langle (1) \cdot \overline{(1)} \rangle = \langle (1) \cdot \overline{(-1)} \rangle$
- $\langle (1) \cdot \overline{(0)} \rangle = \langle (0) \cdot \overline{(1)} \rangle + \mathbb{K} \times \langle (1) \cdot \overline{(1)} \rangle$

Certains auront sans doute reconnu que ceci démontre de façon très simple que $0,\overline{9} = 1$, ou plutôt son équivalent en base 2, dans le quotient $\widehat{\mathfrak{G}\mathfrak{C}} / \sim$.

La notion de chaîne bornée est nécessaire pour ne pas avoir à gérer « trop » de retenues, par exemple, on peut vérifier très simplement que $\langle (1) \cdot \rangle = \langle (0) \cdot \rangle + \mathbb{K} \langle (1) \cdot (2)(4)(8) \cdots (2^n) \rangle$ (autrement dit $0 = 1$, semble-t-il),

24. Cela marcherait avec n'importe quelle base.
25. Le point $\cdot$ ne sera utilisé que pour enlever tout ambigüité lorsque nécessaire.
26. Les (0) initiaux ne seront pas notés s'il n'y a pas d'ambigüité, et nous utiliserons les conventions habituelles pour les suites périodiques

mais on peut tout aussi facilement montrer que la chaîne $c = \langle(1)\cdot(2)(4)(8)\cdots(2^n)\rangle$ ne vérifie pas les conditions de la relation d'équivalence puisque $N|c_i| \leq 2^i \Leftrightarrow N \leq 1$ qui n'est pas vérifié pour tous les entiers N.

Cela semble nous amener une fois de plus à la définition des réels comme des classes d'équivalence, à un détail près néanmoins, c'est que dans chaque classe il y a un élément privilégié. L'addition et la multiplication passe au quotient sans problème, de plus la relation d'ordre est facile à définir sur les chaînes propres (néanmoins les opérations ne fonctionnent bien que sur les classes).

Soit $\mathfrak{R} = \{\langle\cdots, a_{-n}, \cdots, a_2, a_1, a_0, a_1, a_2, \cdots\rangle\}$ avec les propriétés suivantes :

$$\exists\eta\,\forall i\,((a_\eta \in \{-1,1\}) \wedge ((a_\eta = -1) \Rightarrow (a_{\eta+1} = 0)) \wedge ((i < \eta) \Rightarrow (a_i = 0)) \wedge ((i > \eta) \Rightarrow (a_i \in \{0,1\})))$$

$$\forall i\,\exists j\,((j > i) \wedge (a_j = 0))$$

Les éléments de $\mathfrak{R}$ sont appelés des Chaînes Propres.

Attention

Cette façon d'écrire les nombres n'est pas exactement la façon habituelle, pour les négatifs :
Dans l'écriture binaire usuelle, on a : $(-101)_2 \quad = (-5)_{10}$
Dans $\mathfrak{R}$, on a : $\langle(-1)(0)(1)\rangle = (-3)_{10}$

Pour bien comprendre la méthode de Rota, il suffit de faire un exemple « à la main », avec la somme de deux chaînes quelconques :

$$\begin{array}{cccccc}
(-3) & (5)\cdot & (0) & (-2) & (5) & \\
(1) & (-1)\cdot & (2) & (3) & (1) & (2) \\
\hline
(-2) & (4)\cdot & (2) & (1) & (6) & (2)
\end{array}$$

Cette somme n'est clairement pas une chaîne propre, il suffit de lui ajouter 0, c'est à dire $\mathbb{K} = \langle(1)\cdot(-2)\rangle$, judicieusement multiplié par différents coefficients, un certain nombre de fois pour y arriver :

$$\begin{array}{cccccc}
(-2) & (4)\cdot & (2) & (1) & (6) & (2) \\
\hline
 & \cdot & & & (1) & (-2) \\
 & \cdot & & (3) & (-6) & \\
 & \cdot & (2) & (-4) & & \\
 & (2)\cdot & (-4) & & & \\
(3) & (-6)\cdot & & & & \\
\hline
(1) & (0)\cdot & (0) & (0) & (1) &
\end{array}$$

Qui est bien une chaîne propre

On peut vérifier facilement que l'opération précédente est simplement $-\dfrac{7}{8} + 3 = \dfrac{17}{8}$

On peut démontrer que toute chaîne bornée est équivalente à une chaîne propre, et que deux chaînes propres sont équivalentes si et seulement si elles sont égales, et, in fine, que $(\mathfrak{R}, +, \times, <)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, +, \times, <)$.

Chaque réel correspond à une et une seule chaîne propre, malheureusement dès que l'on fait des calculs, le résultat n'a aucune raison d'être une chaîne propre, d'où la nécessité de passer par la relation d'équivalence.

Autres Méthodes Décimales.

Les trois méthodes présentées ci-dessous sont des variations sur la méthode de Simon Stevin.

Liangpan Li.

Une première façon de construire les réels à partir de leur développement décimal, est de considérer les suites $\langle a_0, a_1, a_2\cdots\rangle$ où $a_0 \in \mathbb{Z} \wedge \forall n \in \mathbb{N}^\star(a_n \in \mathbb{Z}_{10}$, et on peut facilement vérifier que l'on peut se ramener au cas des Suites Particulières, avec néanmoins quelques petites différences (la gestion de l'équivalent de ω par exemple). Cette méthode a été étudiée en détail par Liangpan Li, un mathématicien chinois dans l'article : *A New Approach to the Real Numbers* .

Jim Propp.

Une autre façon de construire les réels à partir de leur développement décimal a été présenté par Jim Propp de l'Université Lowell du Massachussetts et quelques membres du MIT dans le document *Carrying On with Infinite Decimals* consiste à faire les opérations position par position, donc avec un résultat potentiellement strictement supérieur à 9, puis à effectuer les calculs de retenues. Une des façons de calculer ces retenues consiste à effectuer ces retenues en commençant par la retenue la plus à gauche **à chaque étape**, la démonstration essentielle dans cet article consiste à montrer que la stratégie de résolution des retenues aboutit toujours à un réel quel que soit cette stratégie (donc pas forcément celle décrite ci-dessus), ou n'aboutit jamais quel que soit cette stratégie.

Martin Klazar.

La méthode présentée ci-dessous a été développée par Martin Klazar dans l'article : *Real Numbers as Infinite Decimals and Irrationality of* $\sqrt{2}$.

On appelle Chaîne Décimale Signée, et nous noterons $\mathfrak{D}$, l'ensemble des couples $x = (s, a)$ où $s \in \{+, -\}$ est le signe de x, et $a \in (\mathbb{Z}_{10})^{\mathbb{Z}^{\dashv}}$ est une chaîne infinie d'éléments de $\mathbb{Z}_{10}$ indexée par une partie finie à droite de $\mathbb{Z}$ (attention, une partie finie à droite de $\mathbb{Z}$ correspond à un nombre fini de décimales *à gauche* de la virgule) telle que le premier élément n'est pas nul, sauf pour la chaîne correspondant à 0, pour laquelle le signe n'existe pas, k = 0, et $\forall k((k < 0) \Rightarrow (a_k = 0))$. Les conventions habituelles seront utilisées pour écrire les éléments de $\mathfrak{D}$, par exemple $(+1_1, 2_0, 3_{-1}, 4_{-2})$ sera plutôt écrit $+12.34$ voire 12.34.

Un éléments x s'écrit donc $x = (\pm, (a_k, a_{k-1}, \cdots))$ où $a_k \neq 0$.

Attention

Cette définition n'exclut pas les développements impropres.

On peut munir $\mathfrak{D}$ d'une relation d'ordre, les éléments dont le signe est $-$ sont dit négatifs, ceux dont le signe est $+$ sont dits positifs :

$$x < y \Leftrightarrow \begin{cases} (x \text{ est négatif }) \wedge ((y = 0) \vee (y \text{ est positif})) \\ (x = 0) \wedge (y \text{ est positif}) \\ (x \text{ est négatif } \wedge y \text{ est négatif }) \wedge \exists m \in \mathbb{Z} \forall i \in \mathbb{Z}((i > m) \Rightarrow (x_i = y_i)) \wedge (y_i < x_i)) \\ (x \text{ est positif } \wedge y \text{ est positif }) \wedge \exists m \in \mathbb{Z} \forall i \in \mathbb{Z}((i > m) \Rightarrow (x_i = y_i)) \wedge (x_i < y_i)) \end{cases}$$

Cette relation est bien une relation d'ordre linéaire totale, mais elle n'est pas dense, par exemple $0.\overline{9} < 1.\overline{0}$, alors qu'il existe aucun élément x vérifiant $0.\overline{9} < x < 1.\overline{0}$. Les couples (x, y) tels qu'il n'existe pas de z vérifiant $x < z < y$ sont appelés des Sauts.

Soit $\sim$ la relation sur $\mathfrak{D}$ définie par : $x \sim y \Leftrightarrow ((x = y) \vee ((x, y) \text{ est un saut }) \vee ((y, x) \text{ est un saut}))$.

Par définition, on pose $\mathbb{R} = \mathfrak{D}/\sim$.

Il est facile de montrer que $(\mathbb{R}, <)$ possède la propriété de la borne supérieure, et que le sous ensemble des éléments de $\mathfrak{D}$ se terminant par une infinité de 0 est dense dans $\mathbb{R}$. Comme l'addition et la multiplication sur cet ensemble sont faciles à définir (on peut se ramener à des opérations sur les entiers), il reste à prolonger ces opérations à $\mathbb{R}$ par continuité (en estimant ces opérations sur l'ensemble des troncatures de chacun des opérandes).

.1.8 A partir de la Soustraction.

Cette méthode de construction des nombres réels a été introduite en 1976 par Nicolaas Govert de Bruijn, un mathématicien hollandais (1918 -).

Quelques mois auparavant le même Nicolaas Govert de Bruijn avait publié un article utilisant l'addition plutôt que la soustraction, nous en donnerons un très bref aperçu avant d'aborder la méthode basée sour la soustraction, car les idées développées pour l'addition sont plus intuitives que leurs homologues pour la soustraction, par contre la définition de la multiplication pose plus de problème (cette partie n'a d'ailleurs pas été publié dans l'article de 1975).

Soit b un entier strictement plus grand que 1 (c'est donc une base possible pour la numération de position). On note $\Sigma = \{f \mid f \in \{0, 1, \dots b-1\}^{\mathbb{Z}} \wedge (\forall x \, \exists y \, ((y > x) \wedge (f(y) < b-1)))\}$ autrement dit on ne prend pas en compte les développements impropres [27].

Dans un premier temps, on définit une addition, notée $\oplus$ sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$:

$$\forall x \in \mathbb{Z} \, ((f \oplus g)(x) = f(x) + g(x))$$

Cette addition n'est pas interne sur Σ, en effet : $f \in \Sigma \, \wedge \, g \in \Sigma \, (f \oplus g \in \{0, 1, \dots 2b-2\}^{\mathbb{Z}})$.

A toute application $f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$, on peut associer une application notée $f_{\equiv_b}$ et définie par :

$$f_{\equiv_b}(x) = \begin{cases} \forall x \, (f_{\equiv_b}(x) \; \equiv \; f(x) \, [b]) \\ \forall x \, (0 \leq f_{\equiv_b}(x) < b) \end{cases}$$

Pour définir la fonction qui va permettre de calculer les retenues, on pourrait, intuitivement, dire que pour avoir une retenue à la position x, il faut et il suffit que pour une position $y > x$, une retenue soit générée, c'est à dire que $f(y) > b-1$, et que toutes les positions intermédiaires, transmettent cette retenue, c'est à dire $(x < z < y) \Rightarrow f(z) = b-1$.

Cette définition a un tout petit défaut, par exemple la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x \leq 0 & \Leftrightarrow f(x) = 0 \\ x > 0 & \Leftrightarrow f(x) = b-1 \end{cases}$$

Autrement dit, dans le cas où $b = 10, f$ représente $0,999\overline{9}$, mais ne génère aucune retenue, aussi une définition un petit peu différente sera utilisée (et telle que la fonction précédente génère une retenue ce qui permet de démontrer que $0,999\overline{9} = 1$).

A toute application $f \in \{0, 1, \dots, 2b-2\}^{\mathbb{Z}}$, on associe $f_{\Delta} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, définie par

$$f_{\Delta}(x) = \begin{cases} f_{\Delta}(x) = 0 & \Leftrightarrow \exists y \, ((y > x) \wedge (f(y) < b-1) \wedge (\forall z((x < z < y) \Rightarrow (f(z) \leq b-1))) \\ f_{\Delta}(x) = 1 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

Finalement, on peut définir une addition interne sur Σ :

$$f + g = ((f \oplus g) \oplus (f \oplus g)_{\Delta})_{\equiv_b}$$

La fonction f_{Δ} permet bien de gérer les retenues, et surtout de les propager autant que nécessaire. La définition devient intuitivement très naturelle après l'avoir manipulée un peu, par exemple dans le cas habituel où b = 10 :

$\mathbb{Z}$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	
f	0	0	7	8	4	7	5	0	
g	0	0	5	1	3	2	7	0	
$f \oplus g$	0	0	12	9	7	9	12	0	
$(f \oplus g)_{\Delta}$	0	1	0	0	1	1	0	0	Cette ligne nécessite un peu de calcul.
$(f \oplus g) \oplus (f \oplus g)_{\Delta}$	0	1	12	9	8	10	12	0	
$f + g$	0	1	2	9	8	0	2	0	Qui est bien la somme attendue.

27. Par contre on autorise un nombre infinie de positions à gauche de la virgule, en fait les chaînes où il existe un N tel que $f(n) = b-1$ pour tout $n < N$ représente un négatif

Construction de de Bruijn à partir de la soustraction.

Cette méthode de construction des nombres réels a été introduite en 1976 par Nicolaas Govert de Bruijn, un mathématicien hollandais (1918 -).

Similairement à la construction précédente, on pose :
$\Sigma = \{f \mid f \in \{0, 1, \ldots b-1\}^{\mathbb{Z}} \wedge (\forall x \, \exists y \, ((y > x) \wedge (f(y) < b-1)))\}$.

Autrement dit Σ ne contient pas de développement impropre, mais contient des développements infinis à gauche de la virgule, y compris ceux dont la valeur à partir d'un certain rang (à gauche) est égal à $b-1$, qui représentent les négatifs.

Pour $(f,g) \in \Sigma^2$ on définit la fonction $f \ominus g$ par : $(f \ominus g)(x) = f(x) - g(x)$, évidemment cette opération n'est pas interne sur Σ.

Pour $(f,g) \in \Sigma^2$, on note $(f \ominus g)_\Delta$ la fonction suivante

$$(f \ominus g)_\Delta(x) = \begin{cases} (f \ominus g)_\Delta(x) = 1 & \Leftrightarrow \exists y \, ((y > x) \wedge (f(y) < g(y)) \wedge (\forall z ((x < z < y) \Rightarrow (f(z) \leq g(z))) \\ (f \ominus g)_\Delta(x) = 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

Et finalement on définit la soustraction sur Σ par :

$$f - g = ((f \ominus g) \ominus (f \ominus g)_\Delta)_{\equiv_b}$$

Il est immédiat que $(f - g) \in \Sigma$.
Comme pour le cas précédent, le plus simple est de faire effectivement les calculs sur quelques exemples

$\mathbb{Z}$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	
f	0	0	7	1	4	7	5	0	
g	0	0	5	2	3	7	7	0	
$f \ominus g$	0	0	2	-1	1	0	-2	0	
$(f \ominus g)_\Delta$	0	0	1	0	1	1	0	0	Cette ligne nécessite un peu de calcul.
$(f \ominus g) \ominus (f \ominus g)_\Delta$	0	0	1	-1	0	-1	-2	0	
$f - g$	0	0	1	9	0	9	8	0	Qui est bien le résultat attendu.

Parfois le résultat est négatif :

$\mathbb{Z}$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	
f	$\overline{0}$	0	5	2	3	7	7	0	
g	$\overline{0}$	0	7	1	4	7	5	0	
$f \ominus g$	$\overline{0}$	0	-2	1	-1	0	2	0	
$(f \ominus g)_\Delta$	$\overline{1}$	1	0	1	0	0	0	0	Cette ligne nécessite un peu de calcul.
$(f \ominus g) \ominus (f \ominus g)_\Delta$	$\overline{-1}$	-1	-2	0	-1	0	2	0	
$f - g$	$\overline{9}$	9	8	0	9	0	2	0	Qui est bien le résultat attendu.

On peut démontrer assez facilement que $(f-g)(x) = f(x) - g(x) - (f \ominus g)_\Delta(x) + b \cdot (f \ominus g)_\Delta(x-1)$, ce qui permet de démontrer que $(f - g) \in \Sigma$.

On peut, bien sûr, définir la fonction $\mathbf{0}$ par $\forall x \in \mathbb{Z} \, (\mathbf{0}(x) = 0)$, par la suite cette fonction sera simplement notée 0, on peut montrer sans difficulté que $(f - 0) = f$ et que $(f - f) = 0$. De la même façon, nous pouvons définir $\mathbf{1}$ par $\forall x \in \mathbb{Z}(((x \neq 0) \Rightarrow (\mathbf{1}(x) = 0)) \wedge (\mathbf{1}(0) = 1))$, par la suite cette fonction sera simplement notée 1.

En définissant l'addition sur Σ par $(f + g) = f - (0 - g)$, on peut démontrer que $(\Sigma, +)$ est un groupe abélien.

Comme vu précédemment Σ contient des éléments qui, intuitivement, ne sont pas des réels, aussi quelques définitions supplémentaires sont nécessaires :

1. Soit $f \in \Sigma$, f est dit strictement positive, ce qui sera noté $f > 0$ si et seulement si :
$$(f \neq 0) \wedge (\exists x \, \forall y((y < x) \Rightarrow (f(y) = 0))$$
Autrement dit f est strictement positive si f n'est pas nulle est si f n'a qu'un nombre fini de décimales non nulles à gauche de la virgule.
2. Soit $f \in \Sigma$, f est dit strictement négative, ce qui sera noté $f < 0$ si et seulement si :
$$\exists x \, \forall y((y < x) \Rightarrow (f(y) = b - 1))$$
Autrement dit f est strictement négative si f n'a qu'un nombre fini de décimales différentes de $b - 1$ à gauche de la virgule.
3. Il est facile de voir que « strictement positive », « nulle » et « strictement négative » sont des cas exclusifs les uns des autres, mais ne couvrent pas Σ en entier.
4. Nous noterons $\mathbb{Q}_b = \{f \in \Sigma \,|\, \exists x \forall y((y > x) \Rightarrow (f(y) = 0)\}$. Autrement dit f n'a qu'un nombre fini de décimales non nulles à droite de la virgule (ce sont donc bien les nombres b-adiques).
5. Nous noterons $\mathbb{Z}_b = \{f \in \Sigma \,|\, \forall x((x > 0) \Rightarrow (f(x) = 0)\}$. Autrement dit f n'a aucune décimale non nulle à droite de la virgule (ce sont donc bien les entiers b-adiques).
6. Nous noterons $\mathbb{R} = \{f \in \Sigma \,|\, (f \text{ est strictement négative }) \vee (f = 0) \vee (f \text{ est strictement positive })\}$.
$(\mathbb{R}, +)$ est un sous-groupe de $(\Sigma, +)$
7. $f < g \Leftrightarrow f - g < 0$.
8. $\mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R}$ est l'ensemble des réels n'ayant qu'un nombre fini de décimales à droite de la virgule (l'équivalent des décimaux en base b). $(\mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
9. Nous noterons $\mathbb{Z}_\Sigma = \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{R}$ (il s'agit bien de $\mathbb{Z}$ dans Σ, mais nous le distinguons du $\mathbb{Z}$ utilisé pour définir Σ).

On peut montrer que : $\forall f \in \mathbb{R} \forall g \in \mathbb{R}\, ((f < g) \Rightarrow (\exists h \in \mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R}(f < h < g))$ autrement dit $\mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$, cette propriété très importante sera utilisée pour la définition de la multiplication.

La propriété d'Archimède peut aussi être assez facilement démontrée : $\forall f \in \mathbb{R} \, \exists g \in \mathbb{Z}_\Sigma(g > f)$.

Il ne reste plus qu'à définir la multiplication :

On peut montrer (par une récurrence [28] sur $\mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R}$) que pour tout $f \in \mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R}$, il existe un et un seul homomorphisme $\mathfrak{h}_f : (\mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R}) \mapsto (\mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R})$ vérifiant (ci-dessous, 1 est la fonction 1 et non le relatif 1) :

$$\forall g \in (\mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R}) \; \forall h \in (\mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R}) \; \Big(\big(\mathfrak{h}_f(g + h) = \mathfrak{h}_f(g) + \mathfrak{h}_f(h) \big) \wedge \big(\mathfrak{h}_f(1) = f \big) \Big)$$

La composée d'homomorphismes étant un homomorphisme, il est clair que :

$$\forall f \in (\mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R}) \; \forall g \in (\mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R}) \; \exists \mathfrak{h} \in \mathcal{Hom}(\mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R}) \; \big(\mathfrak{h}_f \circ \mathfrak{h}_g = \mathfrak{h} \big)$$

En posant $h = \mathfrak{h}(1)$, nous pouvons écrire $\mathfrak{h}_f \circ \mathfrak{h}_g = \mathfrak{h}_h$, il devient alors naturel de poser $h = f \cdot g$, ce qui permet de définir la multiplication sur $\mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R}$ (et donc, pas encore sur $\mathbb{R}$).

Pour étendre la définition de la multiplication de $\mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R}$ à $\mathbb{R}$, c'est la densité de $\mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sera utilisée.

Pour $f \in \mathbb{R}$, on pose f_x, la fonction définie par

$$\forall y \in \mathbb{Z}\, (((y \leq x) \Rightarrow (f_x(y) = f(y))) \wedge ((y > x) \Rightarrow (f_x(y) = 0)))$$

C'est à dire que f_x est l'arrondi de f à x décimales.

Soit $S \subset \mathbb{R}$, une partie minorée de $\mathbb{R}$, on pose $S_x = \{f_x \,|\, f \in S\}$ et $f_x^{\downarrow S} = \min\limits_{f \in S_x}(f)$ (ce minimum est bien atteint puisqu'il s'agit de trouver le minimum parmi b éléments, un nombre fini de fois).

28. La récurrence sur $\mathbb{Q}_b \cap \mathbb{R}$ est un peu différente de la récurrence habituelle sur $\mathbb{N}$.

Enfin on pose $f^{\downarrow S} = \inf(S) \Leftrightarrow f^{\downarrow S}(x) = f_x^{\downarrow S}(x)$ (on ne peut plus parler de minimum, puisque cette fois-ci il s'agit d'un nombre infini de décimales).

A partir de cette définition on peut facilement définir, pour $S \subset \mathbb{R}$, une partie majorée de $\mathbb{R}$:
$\sup(S) = -\inf(-S)$.

A partir des définitions précédentes, on peut utiliser des méthodes comme celle de Cantor (utilisant des suites de Cauchy) (comme dans l'article de de Bruijn), ou les coupures de Dedekind, pour obtenir la multiplication sur les réels (les objets existent contrairement aux constructions à partir de $\mathbb{Q}$) comme une fonction continue sur chacun de ses opérandes.

Construction de Udding à partir de la soustraction.

Cette méthode de construction des nombres réels a été introduite en 1980 par Jan Tijmen Udding, un mathématicien hollandais élève de Nicolaas de Bruijn (et de Dijkstra).

La méthode de Udding est un cas particulier de celle de de Bruijn, avec $b = 2$, ce qui permet de réécrire plus simplement certaines démonstrations et de donner la définition de la soustraction, sans passer par les calculs modulaires mais directement sous la forme :

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) - (f \ominus g)_{\Delta}(x) + (f \ominus g)_{\Delta}(x-1) + (f \ominus g)_{\Delta}(x-1)$$

Bien sûr l'addition se définit comme dans la méthode précédente : $f + g = f - (0 - g)$, et comme dans la méthode de de Bruijn, la multiplication passe par sa définition (là encore un peu plus simple que le cas général) sur un ensemble dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$.

.1.9 Constructions à partir d'intervalles rationnels.

Méthode des intervalles rationnels imbriqués.

Cette méthode a été présentée par Paul Gustav Heinrich Bachmann (1837 – 1920), un mathématicien allemand dans *Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen* paru en 1892.

Définition : Une famille d'intervalles $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (où $I_n = [a_n, b_n]$ [29]) est dite *Imbriquée* si $\forall n \in \mathbb{N}\,(I_{n+1} \subseteq I_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Pour raison de lisibilité, nous noterons plus simplement $\{I_n\}$ les familles d'intervalles imbriqués.

Définition : Une famille d'intervalles imbriqués $\{I_n\}$ est dite *plus fine* que la famille $\{J_n\}$, ce que nous noterons avec le symbole $\preceq$, si et seulement si : $\{I_n\} \preceq \{J_n\} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\,(I_n \subseteq J_n)$.

Définition : On définit la relation $\sim$ entre familles d'intervalles rationnels imbriqués par :

$$\{I_n\} \sim \{J_n\} \Leftrightarrow \exists\{K_n\}((\{K_n\} \preceq \{I_n\}) \wedge (\{K_n\} \preceq \{J_n\})).$$

Cette relation est une relation d'équivalence dont les classes seront notées $\overline{\{I_n\}}$.

Soit I l'ensemble des familles d'intervalles rationnels imbriqués, on note $\mathbb{R}$ le quotient $I\,/\sim$.

Ordre : Soient $x = \overline{\{I_n\}}$ et $y = \overline{\{J_n\}}$, on note

$$(x < y) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{Q}\ \forall q \in \mathbb{Q}\ (((p \in I_n) \wedge (q \in J_n)) \Rightarrow (p < q))$$

Arithmétique : L'arithmétique des intervalles (quelconques) est facile à mettre en place :

Addition : $[a, b] + [a', b'] = [a + a', b + b']$
Multiplication : $[a, b] \cdot [a', b'] = [\min(aa', ab', ba', bb'), \max(aa', ab', ba', bb')]$

On peut en déduire l'arithmétique sur les classes :

$$\overline{\{I_n\}} + \overline{\{J_n\}} = \overline{\{I_n + J_n\}} \quad \wedge \quad \overline{\{I_n\}} \times \overline{\{J_n\}} = \overline{\{I_n \times J_n\}}.$$

Filtres de Cauchy rationnels.

Cette méthode que l'on trouve décrite dans l'ouvrage collectif « Eléments de Mathématiques », signé du pseudonyme commun, Nicolas Bourbaki, a été détaillée dans le document de The reals as rational Cauchy filters de Ittay Weiss un mathématicien d'origine Israélienne, travaillant aujourd'hui à l'université du sud pacifique à Suva aux iles Fidji.

Cette méthode nécessite un certain nombre de définitions préalables :

Soit $\mathcal{F}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{Q}$ (bien sûr, la définition est plus générale, mais nous ne nous intéresserons qu'aux filtres sur $\mathbb{Q}$), $\mathcal{F}$ est un **filtre** (rationnel) si :
- $((F_1 \in \mathcal{F}) \wedge (F_2 \in \mathcal{F})) \Rightarrow (F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F})$
- $((F_1 \in \mathcal{F}) \wedge (F_1 \subset F_2)) \Rightarrow (F_2 \in \mathcal{F})$

Une **base de filtre** $\mathcal{B}$ est une famille de sous-ensembles de $\mathbb{Q}$ si :
- $((F_1 \in \mathcal{B}) \wedge (F_2 \in \mathcal{B})) \Rightarrow \exists F_3 \in \mathcal{B}(F_3 \subset F_1 \cap F_2)$

Soit $\mathcal{B}$ une base de filtre, on appelle **Filtre engendré** par $\mathcal{B}$ et on note $\langle\mathcal{B}\rangle$, le plus petit filtre contenant $\mathcal{B}$, il est défini par :
- $\langle\mathcal{B}\rangle = \{F \subset \mathbb{Q} \mid \exists B \in \mathcal{B}\ (B \subset F)\}$

Un **Filtre de Cauchy** est un filtre $\mathcal{F}$ (forcément rationnel) vérifiant :
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{+\star}\ \exists q \in \mathbb{Q}\ (]q - \varepsilon, q + \varepsilon[\in \mathcal{F})$

29. Pour que l'intervalle existe il faut $a_n \leq b_n$.

Par exemple la famille des sur-ensembles de $]-1,1[$ est un filtre de Cauchy, mais on voit bien que celui-ci ne permet pas de définir un rationnel particulier ni de se rapprocher (in fine, de définir) un réel, aussi il est nécessaire d'ajouter une définition.

Un filtre $\mathcal{F}$ (resp. un filtre de Cauchy) est dit minimal si pour tout filtre $\mathcal{G}$(resp. filtre de Cauchy),
- $(\mathcal{G} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Le filtre défini ci-dessus n'est pas minimal, puisqu'il contient, strictement, par exemple, le filtre des sur-ensembles de $\{0\}$, qui est, lui, clairement de Cauchy et minimal, et qui définit le réel 0 (dire que les sur-ensembles de $\{0\}$ permettent de définir 0 n'est pas très intéressant, heureusement, on peut aller plus loin).

Soit la suite u_n définie par :
- $u_0 = 1$
- $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$

Alors la famille d'intervalles $]u_{2n}, u_{2n+1}[$ est une base de filtre d'un filtre de Cauchy minimal définissant $\sqrt{2}$

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{u_{2n}}$		$\boldsymbol{u_{2n+1}}$
0	$]1,00000000000000000000000000000000000000$	;	$1,50000000000000000000000000000000000000[$
1	$]1,40000000000000000000000000000000000000$	;	$1,41666666666666666666666666666666666667[$
2	$]1,41379310344827586206896551724137931034$	;	$1,41428571428571428571428571428571428572[$
3	$]1,41420118343195266272189349112426035503$	;	$1,41421568627450980392156862745098039216[$
4	$]1,41421319796954314720812182741116751269$	;	$1,41421362489486963835155592935239697225[$
5	$]1,41421355164605469430412820066190559136$	;	$1,41421356421356421356421356421356421356[$
6	$]1,41421356205732046262813424583843877948$	;	$1,41421356242727340249065385853284147458[$
7	$]1,41421356236379951288296372259966670940$	;	$1,41421356237468991062629557889013491012[$
8	$]1,41421356237282141377280856945039496291$	;	$1,41421356237314199715036385699345166733[$
9	$]1,41421356237308699373851811343783173982$	;	$1,41421356237309643083203725697474145371[$

On définit $\mathbb{R}$ comme étant l'ensemble des Filtres de Cauchy minimaux.

Il apparaît clairement que cette méthode est basée sur les mêmes idées que la méthode des Suites de Cauchy, elle présente cependant un avantage : il n'est pas besoin de faire appel à une relation d'équivalence (plusieurs suites de Cauchy peuvent avoir la même limite, alors que deux filtres de Cauchy minimaux ont des limites différentes).

La définition de l'arithmétique des Filtres de Cauchy est directement héritée de l'arithmétique sur les intervalles, seule la relation d'ordre nécessite quelques explications supplémentaires [30] :

On définit une relation d'ordre, notée $\underset{\forall}{\leq}$ sur $\mathfrak{P}(\mathbb{Q})$ par :

$$\forall X \in \mathfrak{P}(\mathbb{Q})\ \forall Y \in \mathfrak{P}(\mathbb{Q})\ ((X \underset{\forall}{\leq} Y) \Leftrightarrow (\forall x \in X\ \forall y \in Y (x \leq y)))$$

et une relation d'ordre, notée $\underset{\exists\forall}{\leq}$ sur $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{Q}))$ par :

$$\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{Q}))\ \forall \mathcal{G} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{Q}))\ ((\mathcal{F} \underset{\exists\forall}{\leq} \mathcal{G}) \Leftrightarrow (\exists F \in \mathcal{F}\ \exists G \in \mathcal{G} (F \underset{\forall}{\leq} G)))$$

Relation qui, restreinte aux filtres de Cauchy minimaux, permet de définir la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. On peut noter que $\mathbb{Q}$ s'injecte naturellement dans $\mathbb{R}$ (à chaque rationnel q on fait correspondre le filtre principal sur q, c'est à dire $\langle\{q\}\rangle$).

30. Nous reprenons les notations de I. Weiss

.1.10 Autres Constructions

Suites non décroissantes de rationnels positifs.

Cette méthode, qui semble être due à Richard Kaye, un mathématicien anglais, dont le site personnel propose un fichier datant de 2007 sur ce sujet, repose sur le même fond que la méthode par les suites de Cauchy, mais d'une façon qui simplifie certaines définitions.

Une suite bornée, non décroissante de rationnels positifs est une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

1. $\forall n \in \mathbb{N}\,(u_n \in \mathbb{Q}^+)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}\,(u_{n+1} \geq u_n)$
3. $\exists M_u \in \mathbb{Q}\,\forall n \in \mathbb{N}\,(u_n \leq M_u)$

Nous noterons $\mathcal{R}^+$, l'ensemble des suites bornées, non décroissantes de rationnels positifs, ce n'est clairement pas encore un ensemble que l'on peut considérer comme isomorphe à $\mathbb{R}^+$, dans la mesure où plusieurs éléments de $\mathcal{R}^+$ peuvent être identifiés à un même élément de $\mathbb{R}^+$, nous allons donc passer par une relation d'équivalence, mais qui dans le cas présent est particulièrement facile à définir :

$$\forall u \in \mathcal{R}^+\,\forall v \in \mathcal{R}^+\,((u \sim v) \Leftrightarrow ((\forall n \in \mathbb{N}\,\exists m \in \mathbb{N}\,(u_n \leq v_m)) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}\,\exists m \in \mathbb{N}\,(v_n \leq u_m))))$$

Il est clair que $\sim$ est une relation d'équivalence, et nous noterons $\mathbb{R}^+ = \mathcal{R}^+/\sim$.

Trivialement $\mathbb{Q}^+$ peut être identifié avec le sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$ des classes des suites constantes de rationnels positifs.

On peut définir sur $\mathbb{R}^+$ (nous noterons [u] la classe de u) :

Une relation d'ordre	: $([u] \leq [v]) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\,\exists m \in \mathbb{N}\,(u_n \leq v_m)$
Une addition	: $[u] + [v] = [(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}]$
Une multiplication	: $[u] \cdot [v] = [(u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}]$

On peut vérifier que ces définitions sont valides (ne dépendent pas du représentant de la classe), qu'elles prolongent les définitions correspondantes sur $\mathbb{Q}$, et vérifient bien les propriétés attendues, y compris la propriété de la borne supérieure.

Cette méthode a permis de fabriquer $(\mathbb{R}^+, +, \cdot, \leq)$, mais la fabrication de $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ s'en déduit facilement, de la même façon que l'on peut construire $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$.

Méthode à partir de la série harmonique.

Cette méthode a été exposée par Peter Shiu, un mathématicien anglais, en 1974 dans la revue anglaise **Mathematical Gazette** elle repose sur la même idée de fond que la méthode des suites de Cauchy, mais en privilégiant certaines suites particulières.

La construction de Peter Shiu est basée sur le résultat, plus général, suivant :

Théorème *Soit une suite réelle* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant :*

❶ $a_n > a_{n+1} > 0$

❷ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

❸ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$*, il existe une sous-suite (nous noterons* ψ *la fonction extractrice) de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, telle que :* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_{\psi(i)}\right) = x$*, ce que nous noterons* $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_{\psi(i)} = x$

Démonstration : Soit une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions ci-dessus :

Soit $x \in \mathbb{R}^{+\star}$,

$\psi(0) = \min\limits_{n}\{n \,|\, a_n < x\}$ (qui existe grâce à la propriété ❸ et qui correspond à la plus grande valeur possible de a_n grâce à la propriété ❶) on pose $u_0 = a_{\psi(0)}$

$\psi(i+1) = \min\limits_{n}\left\{n \Big| \displaystyle\sum_{j=0}^{i} a_{\psi(j)} + a_n < x\right\}$ (qui existe grâce à la propriété ❸ et puisque $x - \displaystyle\sum_{j=0}^{i} a_{\psi(j)} > 0$, et qui correspond à la plus grande valeur possible de a_n grâce à la propriété ❶) et on pose $u_{i+1} = a_{\psi(i+1)}$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$ est croissante et bornée par x, par construction, elle admet donc une limite inférieure ou égale à x.

Soit $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$; si ℓ était différent de x, alors $\ell < x$, on pourrait poser $\eta = x - \ell > 0$; si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ apparaissaient dans la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait divergente (propriété ❷), donc il existe N tel que :

- $a_N < \eta$
- $S_{N-1} < \ell$
- $\ell \leq S_{N-1} + a_N < x$

Mais avec ces propriétés, a_N aurait été pris dans la construction de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne peut donc pas converger vers ℓ, finalement $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = x$.

Pour tout $A \subset \mathbb{N}^\star$, un sous ensemble infini de $\mathbb{N}$ (c'est à dire $|A| = \aleph_0$), il existe une bijection *croissante* $\psi_A : \mathbb{N} \to A$, ce qui autorise à noter $A = \{\psi_A(n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, ou, en posant $a_n = \psi_A(n)$, $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, où $a_{n+1} > a_n$. Nous noterons $\displaystyle\sum_{a_i\in A}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} \psi_A(i)$). C'est à dire qu'à chaque $A \subset \mathbb{N}^\star$, infini on peut faire correspondre une sous-suite extraite d'une suite donnée.

Si A est tel que la série associée à ses inverses est divergente, c'est à dire $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$ (nous dirons que cet ensemble A possède la propriété de divergence), soit $\mathcal{A}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ constitué des sous-ensembles X de $\mathbb{N}$, infinis et tels que la suite rationnelle définie par $X_n = \displaystyle\sum_{x_i\in X}^{n} \frac{1}{x_i}$ est bornée.

Soit $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{A}$, la relation $\sim$ définie par : $X \sim Y \Leftrightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{\psi_X(i)} - \frac{1}{\psi_Y(i)}\right) = 0$, est une relation d'équivalence, dont les classes seront notées σ_X et appelées nombres réels.

Deux ensembles particuliers, entre autres, possèdent cette propriété : $\mathbb{N}^\star$ et $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Si l'ensemble A possède la propriété de divergence et si $X \subset A$ ne la possède pas, alors $A \setminus X$ possède la propriété de divergence.

Soit $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{A}$

- Il existe un sous-ensemble $X_p \subset \mathbb{P}$ tel que $(X_p \in \mathcal{A}) \wedge (\sigma_X = \sigma_{X_p})$.
- $\mathbb{P} \setminus X_p$ possèdent toujours la propriété de divergence.
- Il existe $Y_p \subset (\mathbb{P} \setminus X_p)$ tel que $(Y_p \in \mathcal{A}) \wedge (\sigma_Y = \sigma_{Y_p})$.
- On définit l'addition des réels par : $\sigma_X + \sigma_Y = \sigma_{X_p \cup Y_p}$ (l'union étant disjointe, puisque $X_p \cap Y_p = \varnothing$, tous les termes de la somme sont de la forme $\frac{1}{n}$).
- On définit la multiplication des réels par : $\sigma_X \times \sigma_Y = \sigma_{X_p Y_p}$ (il n'y a qu'une seule façon d'obtenir un élément de $X_p Y_p$ [31] puisque ce sont deux ensembles disjoints de nombres premiers, et donc tous les termes de la somme sont de la forme $\frac{1}{p_1 p_2} = \frac{1}{n}$).
- On définit l'ordre sur les réels par : $(\sigma_X \leq \sigma_Y) \Leftrightarrow \exists X' \, \exists Y' ((\sigma_{X'} = \sigma_X) \wedge (\sigma_{Y'} = \sigma_Y) \wedge (X' \subseteq Y'))$

L'ensemble $(\mathcal{A}/\!\sim, +, \times, \leq)$, muni des opérations et de la relation d'ordre définies ci-dessus est isomorphe au corps ordonné des réels.

Généralisation de la méthode de Shiu.

Cette méthode a été présentée par Alexandru Pintilie, un mathématicien roumain, travaillant au Canada, elle consiste à utiliser n'importe quelle suite rationnnelle vérifiant les hypothèses du théorème ouvrant le chapitre précédent en place de la suite harmonique, le reste des développements est très proche de la méthode de Shiu, néanmoins, la définition des opérations est un peu plus compliquée la somme de deux sous-suites d'une suite donnée n'étant pas forcément une sous-suite admissible de la suite initiale (qui sera notée $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ci-dessous), alors que dans le cas la méthode de Shiu on peut trouver des représentants qui simplifie la définition des opérations.

Dans le document original de A. Pintilie, la condition d'avoir une suite décroissante n'est pas imposée, mais cette condition permet de simplifier certaines écritures.

On ne considère que les sous-suites pour lesquelles la fonctions extractrice ψ vérifie les conditions ci-dessous :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} a_{\psi(i)} &< \infty \\ \psi(i) &= \min_n \left\{ n \middle| \exists m \in \mathbb{N} \left(a_n < \sum_{j=i+1}^{m} a_{\psi(j)} \right) \right\} \end{aligned}$$

> **Attention**
> Cette définition ne permet pas de construire une fonction extractrice, mais seulement de vérifier qu'une fonction extractrice donnée possède bien la bonne propriété.

Cette définition permet d'assurer l'unicité des sous-suites dans le sens où si ψ et φ sont deux fonctions extractrices vérifiant les conditions ci-dessus, alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{+\star} \, \exists n \in \mathbb{N} \, \forall m > n \left(\left| \sum_{i=0}^{m} a_{\psi(i)} - \sum_{i=0}^{m} a_{\varphi(i)} \right| > \varepsilon \right)$$

Soit $\mathcal{S}_a$, l'ensemble des sous-suites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dont la fonction extractrice vérifie les conditions ci-dessus, alors on peut poser $\mathbb{R}^{+\star} = \mathcal{S}_a$, sans faire intervenir de relation d'équivalence dans cette définition (contrairement à la méthode de P. Shiu), pour une suite initiale donnée.

Soient $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}_a$ et $Y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}_a$ deux réels définis à partir d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

La fonction extractrice ψ définie par [32] :

31. $X_p Y_p = \{xy \,|\, (x \in X_p) \wedge (y \in Y_p)\}$.
32. avec la convention usuelle que $\sum_{j=0}^{-1} X_i = 0$.

$$\psi(i) = \min_n \left\{ n \middle| \exists m \in \mathbb{N} \left(\sum_{j=0}^{i-1} (a_{\psi(j)}) + a_n < \sum_{j=0}^{m} (x_j + y_j) \right) \right\}$$

permet de définir la somme de deux réels : $X + Y = (a_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

La fonction extractrice φ définie par :

$$\varphi(i) = \min_n \left\{ n \middle| \exists m \in \mathbb{N} \left(\sum_{j=0}^{i-1} (a_{\varphi(j)}) + a_n < \left(\sum_{j=0}^{m} x_j \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} y_j \right) \right) \right\}$$

permet de définir le produit de deux réels : $X \times Y = (a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

Attention

Les deux définition ci-dessus des fonctions extractrices ψ et φ, permettent bien de construire ces fonctions, et donc de définir l'addition et la multiplication.

La relation d'ordre sur $\mathcal{S}_a$ est définie par $X < Y \Leftrightarrow \exists n\ \forall m((x_n < y_n) \wedge ((m < n) \Rightarrow (x_m = y_m)))$

Quasi-endomorphismes

L'idée de base de cette construction remonte à la théorie des proportions due à Eudoxe de Cnide, médecin, mathématicien, philosophe et astronome grec (-400 à -350 environ).

Cette méthode permet de passer de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{R}$ sans passer par $\mathbb{Q}$.

L'ensemble $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, peut être muni, naturellement de deux opérations :

$$\begin{array}{llrcl} \text{Addition} & : & (f+g)(n) & = & f(n)+g(n) \\ \text{Composition} & : & (f\circ g)(n) & = & f(g(n)) \end{array}$$

Il est immédiat de vérifier que $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}},+)$ est un groupe abélien, et que $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}},\circ)$ est associatif et unitaire, mais ni commutatif, ni distributif sur l'addition et seuls les bijections ont un inverse pour $\circ$.

Définition : *un quasi-endomorphisme*[33] *est une fonction* $\varphi\in\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ *vérifiant :*

$$\exists K_\varphi\in\mathbb{N}\,\forall m\in\mathbb{Z}\,\forall n\in\mathbb{Z}\,(|\varphi(n+m)-\varphi(n)-\varphi(m)|\leq K_\varphi)$$

La notation K_φ *permet d'identifier la constante d'une fonction* φ *particulière.*

Définition : *deux quasi-endomorphismes sont dits équivalents, et on note* $\varphi\sim\psi$ *:*

$$\varphi\sim\psi\Leftrightarrow\exists K_\psi^\varphi\in\mathbb{N}\,\forall n\in\mathbb{Z}\,(|\varphi(n)-\psi(n)|\leq K_\psi^\varphi)$$

(Une autre façon de le dire, c'est que la fonction différence $(\varphi-\psi)$ *est bornée).*

La motivation de ces définitions est que pour tout réel α la fonction définie par $\varphi_\alpha(n)=\lfloor\alpha n\rfloor$ [34] est un quasi-endomorphisme et si α et β sont des réels différents, les fonctions φ_α et φ_β ne sont pas équivalentes ($\mathbb{R}$ est archimédien).

L'ensemble des quasi-endomorphismes sera noté $\mathfrak{Q}$.

On peut facilement vérifier que $(\mathfrak{Q},+)$ est un sous-groupe abélien de $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}},+)$.

On peut tout aussi facilement vérifier que le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ des fonctions bornées est en fait un sous-ensemble de $\mathfrak{Q}$.

La démonstration que l'opération $\circ$ est interne dans $\mathfrak{Q}$ est un petit peu plus compliquée.

$$\left\{\begin{array}{ll}
 & |f\circ g(n+m)-f\circ g(n)-f\circ g(m)| \\
= & |f(g(n+m))-f(g(n))-f(g(m))| \\
= & |f(g(n+m))-f(g(n)+g(m))+f(g(n)+g(m))-f(g(n))-f(g(m))| \\
\leq & |f(g(n+m))-f(g(n)+g(m))|+|f(g(n)+g(m))-f(g(n))-f(g(m))| \\
\leq & |f(g(n+m))-f(g(n)+g(m))|+K_f \\
= & |f(g(n+m)-g(n)-g(m))-f(g(n+m)-g(n)-g(m))+f(g(n+m))-f(g(n)+g(m))|+K_f \\
= & |f(g(n+m)-g(n)-g(m))+f((g(n)+g(m))+(g(n+m)-g(n)-g(m))) \\
- & f(g(n+m)-g(n)-g(m))-f(g(n)+g(m))|+K_f \\
\leq & |f(g(n+m)-g(n)-g(m))| \\
+ & |f((g(n)+g(m))+(g(n+m)-g(n)-g(m)))-f(g(n+m)-g(n)-g(m))-f(g(n)+g(m))|+K_f \\
\leq & |f(g(n+m)-g(n)-g(m))|+2K_f \\
\leq & M+2K_f
\end{array}\right.$$

Les deux seuls points nécessitant une petite explication sont les passages concernant :

1. $|f((g(n)+g(m))+(g(n+m)-g(n)-g(m)))-f(g(n+m)-g(n)-g(m))-f(g(n)+g(m))|$ qui est de la forme $|f(X+Y)-f(X)-f(Y)|$.
2. $|f(g(n+m)-g(n)-g(m))|\leq M$, il s'agit de l'image par f, d'un ensemble borné (par définition d'un quasi-endomorphisme), c'est donc bien un ensemble borné, par un nombre M, par exemple.

33. On trouve parfois quasi-homomorphisme, pseudo-homomorphisme, ou encore almost-homomorphism ou slope (qui peut se traduire par pente) en anglais.
34. $\lfloor x\rfloor$ représente la partie entière de x.

Les démonstrations qui permettent de montrer que $(\mathfrak{Q}/\sim, +, \circ, <)$ est un corps commutatif totalement ordonné, vérifiant la propriété de la borne supérieure sont simples (aucune connaissance qui ne soit élémentaire n'est nécessaire), mais très calculatoires, et certaines un peu longues ; ces démonstrations se trouvent dans le document *Analysis of an Efficient Construction of the reals* (voir les références ci-dessous).

Ces démonstrations permettent de montrer que $(\mathfrak{Q}/\sim, +, \circ, <)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, +, \times, <)$.

On peut identifier $\mathbb{Z}$ avec l'ensemble des classes des fonctions de la forme $\varphi_n(i) = ni$ et $\mathbb{Q}$ avec l'ensemble des classes de fonctions de la forme :

$$\begin{cases} i \geq 0 \Rightarrow \varphi_q^p(i) = \min\limits_{n\in\mathbb{N}}\{n \,|\, qn \geq pi\} \\ i < 0 \Rightarrow \varphi_q^p(i) = -\varphi_q^p(-i) \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que $\varphi_q^p \circ \varphi_q \sim \varphi_p$.

Méthode de Weierstrass.

La méthode de Karl Theodor Wilhelm Weierstrass un mathématicien allemand (1815 - 1897) n'a qu'un intérêt historique, d'ailleurs Weierstrass ne l'a pas publié, ce sont certains de ses étudiants qui ont collecté des notes de cours.

Cette méthode utilise des multiensembles (éventuellement infinis) dont tous les éléments sont, soit des entiers naturels, soit des inverses d'entiers naturels, par exemple $\left\{\left\{1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}\right\}$, nous utiliserons la notation $N \underset{<\infty}{\subseteq} M$, pour indiquer que le multiensemble N est un sous-multiensemble **fini** de S.

Un tel multiensemble M est dit *borné* si $\exists \mu \in \mathbb{Q} \, \forall N \underset{<\infty}{\subseteq} M \left(\sum\limits_{p\in N} (p) < \mu \right)$

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des multiensembles bornés définis ci-dessus, l'addition et la multiplication des multiensembles se définissent très naturellement, par contre, la relation d'équivalence qui va permettre de définir les réels est un peu plus subtile :

$$\forall X \in \mathcal{M} \; \forall Y \in \mathcal{M} \left(X \leq Y \Leftrightarrow \forall X' \underset{<\infty}{\subseteq} X \; \exists Y' \underset{<\infty}{\subseteq} Y \left(\sum_{x\in X'} (x) \leq \sum_{y\in Y'} (y) \right) \right).$$

Et finalement la relation $\sim$ définie par : $(X \sim Y) \Leftrightarrow ((X \leq Y) \wedge (Y \leq X))$ permet de construire les réels positifs $\mathbb{R}^{+\star} = \mathcal{M}/\sim$

Variation sur les coupures de Dedekind.

Eugene A. Maier & David Maier (fils du premier), deux mathématiciens américains (Université de l'Orégon), ont présenté une construction basée sur les coupures de Dedekind, en prenant en compte les sous-ensembles minorés de $\mathbb{Q}$, et l'ensemble de leurs minorants.

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des sous-ensembles minorés de $\mathbb{Q}$, et $\sim$ la relation entre éléments de $\mathcal{M}$ définie par $X \sim Y$ si et seulement si X et Y ont le même ensemble de minorants, alors $\mathbb{R} = \mathcal{M}/\sim$.

Complétion de MacNeille.

Cette méthode, qui s'inspire des coupures de Dedekind, est due à Holbrook Mann MacNeille (en 1937), un mathématicien américain (1907 - 1973).

La complétion de MacNeille (ou de Dedekind-MacNeille) est une méthode, très générale, qui permet de compléter une relation d'ordre quelconque (même, et surtout, les ordres partiels) pour en faire un treillis complet, et, bien sûr, le résultat est « le plus petit » treillis complet contenant (via un isomorphisme) la relation d'ordre de départ.

Soit $(X, <)$ une relation d'ordre, pour tout sous-ensemble $A \subseteq X$, on note :

1. $\mathcal{U}(A)$, l'ensemble des bornes supérieures de A (c'est à dire l'ensemble des éléments de X plus grands (ou égaux) que tous les éléments de A).
2. $\mathcal{L}(A)$, l'ensemble des bornes inférieures de A (c'est à dire l'ensemble des éléments de X plus petits (ou égaux) que tous les éléments de A).
3. $A^\sharp = \mathcal{U}(\mathcal{L}(A))$.
4. $X^\natural = \{A \,|\, (A \subseteq X) \wedge (A = A^\sharp)\}$,

$(X^\natural, \subset)$ [35] est un treillis complet dans lequel on peut plonger (canoniquement) $(X, <)$, c'est le complété de MacNeille de X.

On peut montrer que $\mathbb{Q}^\natural = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, \infty\}$

La définition des opérations se fait comme dans la méthode des coupures de Dedekind, et en éliminant les deux infinis, on retrouve bien $(\mathbb{R}, +, \times, <)$.

De la même façon, par exemple, $(\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z})^\natural = \overline{\mathbb{R}}$. Partir de $(\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z})$ permet de ne pas passer par $\mathbb{Q}$, la définition des opérations sur $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ découle directement des opérations sur $\mathbb{Z}$, par contre il est nécessaire de préciser la relation d'ordre (il suffit de définir les nombres positifs) :

$$a + b\sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} & ((a \geq 0) \quad \wedge \quad (b \geq 0) \quad \wedge \quad (ab \neq 0)) \\ \bigvee & ((a \leq 0) \quad \wedge \quad (b > 0) \quad \wedge \quad (a^2 < 2b^2)) \\ \bigvee & ((a > 0) \quad \wedge \quad (b \leq 0) \quad \wedge \quad (a^2 > 2b^2)) \end{cases}$$

35. Le complété de MacNeille est usuellement noté $X^\star$, mais ici nous ne voulons pas prendre le risque de confondre le complété de MacNeille de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Construction à base de Recouvrements.

Cette méthode de construction des réels semble tirer son origine d'un article de Michael Paul Fourman, un mathématicien anglais (1950 -) et John Martin Elliott Hyland un autre mathématicien anglais : Sheaf models for analysis (1979).

Il est nécessaire de commencer par quelques définitions.

Dans la partie Généralités algébriques on trouvera les définitions de Treillis, $\wedge$-treillis, et dans la partie Relation d'Ordre section et partie commençante, section et partie finissante.

Définition : Soit $(E, \leq)$ un $\wedge$-treillis, on appelle *Relation de Recouvrement* une relation notée $\rhd$ entre éléments de $\mathfrak{P}(E)$ et de E (c'est à dire dont le graphe $\mathcal{G}_{\rhd} \subset \mathfrak{P}(E) \times E$) vérifiant :

- $\forall X \in \mathfrak{P}(E)\, \forall x \in E\, ((X \rhd x) \Rightarrow X \subseteq \downarrow\!x)$
- $\forall X \in \mathfrak{P}(E)\, \forall x \in E\, \forall y \in E\, (((X \rhd x) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow (\{y \wedge z \,|\, z \in X\} \rhd y))$

Définition : Soit $(E, \leq)$ un $\wedge$-treillis, et $\rhd$, une relation de Recouvrement de E, I est appelé un $\rhd$-Idéal si et seulement si :

- $I \subseteq E$
- $\forall x \in E\, \forall y \in E\, (((x \in I) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow (y \in I))$ une autre façon de le dire : $(I = \downarrow\!I)$.
- $\forall X \in \mathfrak{P}(E)\, \forall x \in E\, ((X \rhd x) \wedge ((X \subseteq I)) \Rightarrow (x \in I))$

Un exemple simple et naturel [36] pour illustrer la notion de Recouvrement :

Soit $\mathbb{O}$ les ouverts d'une topologie, il est clair que $(\mathbb{O}, \subseteq)$ est un $\wedge$-treillis, on définit une relation de Recouvrement $\rhd$ par :
$\forall X \in \mathfrak{P}(\mathbb{O})\, \forall x \in E\, ((X \rhd x) \Leftrightarrow (X \text{ est un recouvrement ouvert de } x))$

Nous noterons $\overset{-\infty}{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \bigcup \{-\infty\}$ et $\overset{+\infty}{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \bigcup \{+\infty\}$, et nous appellerons intervalle uniquement les éléments $(p, q) \in \overset{-\infty}{\mathbb{Q}} \times \overset{+\infty}{\mathbb{Q}}$ vérifiant $p \leq q$, et plus spécifiquement singleton quand $p = q$.

Soit la relation $\preccurlyeq$ définie par :

$$((p, q) \preccurlyeq (p', q')) \Leftrightarrow ((p \geq p') \wedge (q \leq q'))$$

Il est facile de vérifier que $(\overset{-\infty}{\mathbb{Q}} \times \overset{+\infty}{\mathbb{Q}}, \preccurlyeq)$ est un $\wedge$-treillis dont le sup est $\{-\infty, +\infty\}$ et un calcul immédiat donne : $(p, q) \wedge (p', q') = (\max(p, p'), \min(q, q'))$.

Autrement dit :

$$(p, q) \preccurlyeq (p', q') \begin{cases} p < q & \Rightarrow \quad (p, q) \text{ est un intervalle et } (p', q') \text{ est un intervalle qui le contient.} \\ p = q & \Rightarrow \quad (p, q) \text{ est un singleton et } (p', q') \text{ est un intervalle qui le contient.} \\ p > q & \Rightarrow \quad \begin{cases} (q, p) \text{ est un intervalle et } (p', q') \text{ est un intervalle qui contient } p \text{ ou } q. \\ (q, p) \text{ est un intervalle qui contient l'intervalle } (p', q'). \\ (q, p) \text{ est un intervalle qui contient l'intervalle } (q', p'). \end{cases} \end{cases}$$

Nous définissons le recouvrement $\rhd$ par :

$$\begin{cases} p \geq q \Rightarrow & \varnothing \rhd (p, q) \\ p < q \Rightarrow & \begin{cases} \forall p'\, \forall q' ((p \leq q' < p' \leq q) \Rightarrow (\{(p, p'), (q, q')\} \rhd (p, q))) \\ \{(p', q') \,|\, p < p' < q' < q\} \rhd (p, q) \end{cases} \end{cases}$$

On peut identifier $\mathbb{Q}$ et l'ensemble des $\rhd$-Idéaux engendrés par les singletons, et finalement on peut montrer que l'ensemble des $\rhd$-Idéaux est isomorphes à $\mathbb{R}$.

Les démonstrations sont très techniques, elles se trouvent détaillées dans le livre *Stone Spaces* par Peter T. Johnstone (voir dans les références).

36. Cette notion est très liée à la « Topologie sans Point ».

Construction à partir des Nombres Surréels.

On peut aussi construire les réels à partir des Nombres Surréels :

On peut construire $\mathbb{Z}$ très facilement $\begin{cases} 0 & = & \{\,|\,\} \\ n & = & \{(n-1)|\,\} & \text{si } n > 0 \\ n & = & \{\,|(n+1)\} & \text{si } n < 0 \end{cases}$

On peut aussi, facilement construire $\mathfrak{D}$ l'ensemble des Nombres Dyadiques : $\dfrac{j}{2^k} = \left\{ \dfrac{j-1}{2^k} \,|\, \dfrac{j+1}{2^k} \right\}$

Dans les deux cas précédents, les nombres sont définis uniquement à partir de nombres précédemment définis.

Les nombres réels sont alors définis comme les nombres surréels de la forme $(D_g|D_d)$ [37], où :

$$\begin{cases} D_g \bigcup D_d = \mathfrak{D} \\ D_g \bigcap D_d = \varnothing \\ \forall x\, \forall y((x \in X_g) \wedge (y \in X_d) \Rightarrow (x < y)) \end{cases}$$

Les opérations sont les opérations standard sur les Surréels, et la relation d'ordre est celle des Surréels.

37. C'est donc une méthode très semblable aux coupures de Dedekind, sauf que l'on se plonge d'entrée dans un sur-ensemble de $\mathbb{R}$.

Construction à partir des Nombres Hyperrationnels.

Cette méthode passe par l'analyse non standard : à partir de $\mathbb{Q}$, on considère l'ensemble des suites de rationnels, c'est à dire l'ensemble $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et on note $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$.

L'ultraproduit $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, appelé ensemble des Hyperrationnels, hérite des relations et opérations définies sur $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{Q}$ se plonge naturellement dans cette ultraproduit (donc nous ne ferons pas la différence entre $\mathbb{Q}$ et son image dans $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$), ce qui permet de donner quelques définitions de base :

- α est un infinitesimal si $\forall q \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}(|\alpha| < q)$
- α est fini si $\exists q \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}(|\alpha| < q)$
- α est un infini si $\forall q \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}(|\alpha| > q)$
- α et β sont dit ultra-proches (ou infiniment-proches), et on note $(\alpha \doteq \beta) \Leftrightarrow (\alpha - \beta)$ est in infinitésimal.
- On appelle monade de α, et on note $\text{Mon}(\alpha) = \{\beta \,|\, \alpha \doteq \beta\}$.

On note $\mathbb{Q}_f$ le sous-ensemble de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ des hyperrationnels finis.
On peut alors montrer que $(\mathbb{Q}_f/\doteq, +, \times, <)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, +, \times, <)$.

Cette construction passe par les Hyperrationnels et suit le schéma :

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} \supset \mathbb{Q}_f \longrightarrow (\mathbb{Q}_f/\doteq) \cong \mathbb{R}$$

Ou

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} \supset \mathbb{Q}_f \supset \text{Mon}(0) \longrightarrow (\mathbb{Q}_f/\text{Mon}(0)) \cong \mathbb{R}$$

A comparer avec le schéma de la méthode de Cantor à l'aide des suites de Cauchy ; en notant $\mathfrak{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy et $\mathfrak{Z}$ l'ensemble des suites de Cauchy qui convergent vers 0 (et qui est trivialement un idéal maximal de $\mathfrak{C}$) :

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \supset \mathfrak{C} \supset \mathfrak{Z} \longrightarrow (\mathfrak{C}/\mathfrak{Z}) \cong \mathbb{R}$$

.1.11 Propriétés algébriques et Topologiques

$(\mathbb{R}, +, \times, <)$ est un corps totalement ordonné (donc de caractéristique 0), complet (au sens de la propriété de la borne supérieure), mais ce n'est pas un corps algébriquement clos ($x^2 + 1 = 0$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$). Etant de caractéristique 0, son corps premier est $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

On peut citer quelques théorèmes :

- Soit une suite d'intervalles fermés $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \left(((a_n \leq b_n) \wedge (a_n \leq a_{n+1}) \wedge (b_{n+1} \leq b_n)) \Rightarrow \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \varnothing \right) \right)$$

.
- Dans $\mathbb{R}$, toute suite croissante majorée est convergente.
- $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists! n \in \mathbb{N}\, (n \leq x < n+1)$, ce nombre entier n est appelé partie entière de x et on le note $\lfloor x \rfloor = n$.
- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{R}$ toute suite de Cauchy est convergente.
- Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont exactement les fermés bornés.
- $\mathbb{R}$ possède la propriété de Baire : toute intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- Théorème de Bolzano-Weierstrass : Toute suite bornée de nombres réels admet une sous-suite convergente.
- Les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ (sous-groupes discrets), soit denses dans $\mathbb{R}$ (sous-groupes continus).
- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est aussi un corps réel clos, c'est à dire vérifie :

Axiome 1 : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Axiome 2 : $\forall x\, \exists y\, ((x = y^2) \vee (x + y^2 = 0))$
Schéma 1 : Pour tout nombre entier n : $\forall x_1\, \forall x_2\, \cdots\, \forall x_n\, (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 1 \neq 0)$.
Schéma 2 : Pour tout nombre entier n : $\forall a_0\, \forall a_1\, \cdots\, \forall a_{2n}\, \exists x\, \left(x^{2n+1} + \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i\right) = 0$

Un théorème intéressant concernant les corps réels clos (RCF [38] en général dans la littérature anglaise) :
La clôture algébrique d'un corps réel clos est de degré fini.

La théorie des corps réels clos s'écrit donc dans le langage des anneaux $\mathcal{L}(0, 1, +, \times)$, néanmoins, on peut définir une relation d'ordre dans ce langage : $x < y \Leftrightarrow \exists z((z \neq 0) \wedge (x + z^2 = y))$.

La théorie des corps réels clos est exactement la même dans le langage des anneaux, ou dans le langage des anneaux ordonnés (puisque l'ordre est définissable dans le langage des anneaux), à un « détail » près : La théorie des corps réels clos admet l'élimination des quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}(0, 1, +, \times, <)$ des anneaux ordonnés.

La théorie des corps réels clos est donc complète et décidable, ce qui a pour conséquence que tous les corps réels clos sont élémentairement équivalents à $(\mathbb{R}, +, \times, <)$.

.1.12 Utilisation en physique

Les Réels sont omniprésents dans les modèles physiques, mais totalement absents des mesures, ce qui fait que, dans la pratique, les physiciens utilisent essentiellement les nombres Rationnels.

.1.13 Références

1. **Modes de Construction**
   - i) R. Dedekind, *Les nombres : que sont-ils et à quoi servent-ils ?*, Vieweg. Braunschweig, 1888, ré-édité Paris, 1979.
   - ii) Gary Sng Chee Hien, *Construction of the Real Number System*, Department of Mathematics National University of Singapore, 2000 - 2001.
   - iii) Huan Long, *Construction of the Real Numbers*, Shanghai Jiao Tong University.
   - iv) E. A. Maier & D. Maier, *A Construction of the Real Numbers*, The Two-Year College Mathematics Journal, Mathematical Association of America, 1973.
   - v) E. D. Bloch, *Construction of the Real Numbers* , The Real Numbers and Real Analysis, Springer, 2011.
   - vi) F. Faltin, N. Metropolis, B. Ross & G. C. Rota, *The real numbers as a wreath product* , Advances in Mathematics , Volume 16, N° 3, pages 278 - 304, 1975.
   - vii) B. Odgers & Nguyen Hanh Vo, *Analysis of an Efficient Construction of the reals*, 2002.
   - viii) R. D. Arthan, *The Eudoxus Real Numbers* , 2004
   - ix) R. D. Arthan, *An Irrational Construction of $\mathbb{R}$ from $\mathbb{Z}$*, Theorem Proving in Higher Order Logics, SpringerVerlag, Berlin, Volume 2152 de la série *Lecture Notes in Computer Science*, pages 43 - 58, 2001.
   - x) P. G. H. Bachmann, *Vorlesungen uber die natur der irrationalzahlen* , B. G. Teubner, Leipzig, 1892.
   - xi) N. G. de Bruijn, *Defining Reals Without the Use of Rationals* , Indagationes mathematicae Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Series A, Volume 38, N° 2 2, pages 100 - 108, 1976.
   - xii) A. Knopfmacher & J. Knopfmacher, *Two Constructions of the Real Numbers via Alternating Series*, The International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 12, N° 3, pages 603 - 613, 1989.
   - xiii) P. T. Johnstone, *Stone Spaces* , Cambridge University Press, 1982.
   - xiv) J. C. Tweddle, *Weierstrass's Construction of the Irrational Numbers*, Mathematische Semesterberichte, Springer, Volume 58, N° 1, pages 47 – 58, 2011.
   - xv) E. A. Maier & D. Maier, *A Construction of the Real Numbers*, The Two-Year College Mathematics Journal (Mathematical Association of America), Volume 4, N° 1, Pages 31 - 35, 1973.

38. Real Closed Field.

xvi) N. Bourbaki, *Topologie Générale : Chapitre I à IV*, Eléments de Mathématiques, SpringerVerlag, Berlin, Chapitre II.3 et Chapitre IV, 2007.

xvii) I. Weiss, *The reals as rational Cauchy filters*, New Zealand Journal of Mathematics, Volume 46, pages 21 - 51, 2016.

xviii) P. Shiu, *A new construction of the real numbers*, Mathematical Gazette, Volume 58, N° 403, pages 39-46, Londres, UK, 1974.

xix) I. Weiss, *The real numbers - a survey of constructions*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Volume 45, N° 3, pages, 737-762, Arizona, 2015.

xx) A. Pintilie, *A Construction without factorization for the Real Numbers*, Libertas Mathematica, Volume 8, American Romanian Academy of Arts and Science, pages 155 - 160, 1988.

2. **Propriétés Algébriques**

i) J. R. Buchanan, *Algebraic and Order Properties of* $\mathbb{R}$, Millersville University, Pennsylvanie, 2007.

ii) R. G. Bartle & D. R. Sherbert, *Basic Concepts of Analysis*, New Mexico Institute of Mining and Technology, 2004.

iii) B. E. Blank, *Introduction to Real Analysis*,Washington University, St. Louis, 2008

iv) J. Hutchinson, *Calculus Notes*, Department of Mathematics, School of Mathematical Sciences, Australian National University, 1998

v) R. Pruim, *Axioms for the Real Number System*, Department of Mathematics and Statistics, Calvin College, Grand Rapids, Michigan, 2003.

vi) B. Kahng, *The Properties Of Real Numbers I*, Division of Science and Mathematics University of Minnesota, Morris, 2008.

vii) B. Kahng, *The Properties Of Real Numbers II*, Division of Science and Mathematics University of Minnesota, Morris, 2008.

viii) J. K. Mattila, *Predicate Logic*, Lappeenranta University of Technology, Finlande, 2009

3. **Corps Réels Clos**

i) V. L. Noquez, *Model Theory of Real Closed Fields*, Carnegie Mellon University, Logic and Computation Senior Thesis, 2008.

ii) E. Artin & O. Schreier, *Construction algébrique d'un corps réel*, séminaire de mathématiques, Hambourg, Volume 5, pages 85- 99, 1926.

iii) M. Deronne, P. Hauweele & N. Meunier, *Algorithme d'Elimination des Quantificateurs pour les Corps Algébriquement/Réels Clos selon A.Muchnik*, 2009.

iv) R. van der Meyden & M. K. Patra, *The Theory of a Real Closed Field and its Algebraic Closure*, School of Computer Science and Engineering, University of New South Wales, Sydney 2052, Australia, 2008.

4. **Propriétés Topologiques**

i) C. Blanchet, *Propriétés topologiques des nombres réels*, Université Paris 7 (Denis Diderot), 2007.

ii) N. Lanchier, *Propriétés topologiques de* $\mathbb{R}$, Arizona State University, School of Mathematical and Statistical Sciences, 2007.

iii) E. Le Yaouanc, *Nombres Réels*, Université de Caen, Basse Normandie, 2006.

iv) A. Decomps, *Nombres Réels, Droite Réelle*, Université de Lille 1.

v) J. M. Erdman, *A ProblemText in Advanced Calculus*, Portland State University, Oregon, 2009.