Corrigé de l'exercice :

(i) $\|f\|_1 = \|1 + X + X^3\|_1 = 1 + 1 + 1 = 3$

$\|g\|_1 = \|2 + X^3\|_1 = 2 + 1 = 3$

on a : $f * g = (1 + X + X^3) * (2 + X^3)$

$= 2 + 4X + 2X^2 + 4X^3$

ainsi : $\|f * g\|_1 = \|2 + 4X + 2X^2 + 4X^3\|_1$

$= 2 + 4 + 2 + 4 = 12$

(ii) A est une algèbre de Banach unifère et commutative.

en effet :

$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) * \left(\left(\sum b_k X^k\right) * \left(\sum c_k X^k\right)\right)$

$= \left(\sum a_k X^k\right) * \left[\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{k} b_p c_{k-p}\right) X^k\right]$

$= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p'=0}^{k} a_{p'} \sum_{p=0}^{k} b_p c_{k-p'-p}\right) X^k$

d'autre part :

$\left[\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) * \left(\sum_{k=0}^{n} b_k X^k\right)\right] * \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$

$= \left(\sum_{k=0}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p}}_{d_k}\Big) X^k\right) * \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$

(1)

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p'=0}^{k} d_{p'} c_{k-p'} \right) X^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p'=0}^{k} a_p b_{p'-p} c_{k-p'} \right) X^k$$

??

Je n'ai pas eu l'égalité désirée.

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right) * \left(\sum_{k=0}^{n} b_k X^k + \sum_{k=0}^{n} c_k X^k \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k * \left(\sum_{k=0}^{n} (b_k + c_k) X^k \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{k} a_p (b_{k-p} + c_{k-p}) \right) X^k$$

D'autre part

$$\left(\sum_{k=0}^{n} b_k X^k + \sum_{k=0}^{n} c_k X^k \right) * \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} (b_k + c_k) X^k \right) * \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{k} (b_p + c_p) \cdot a_{k-p} \right) X^k \right.$$

$$= \sum \left(\sum_{p=0}^{k} \right.$$

là à cette étape on effectue un changement de variable en posant

$$p' = k - p$$

2

et on aura l'égalité désirée

$$\left(\lambda\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)\right) * \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k\right) * \sum b_k X^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{k} \lambda a_p b_{k-p}\right) X^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{k} a_p \lambda b_{k-p}\right) X^k$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) * \lambda \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

Conclusion : A est une algèbre ~~de~~ de Banach (complète ??)

Banach ?? (norme complète)

voici ma réponse " une suite de Cauchy dans A.

soit $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)_n$

ou $\|\sum a_k X^k\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$

$n \to \infty$

$\downarrow$

∞ ??

mais cela n'appartient pas à $K_n[X]$??

7] l'algèbre de Banach A est unitaire en effet :

$$1 \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum a_k X^k \cdot 1 = \sum a_k X^k.$$

Elle est aussi commutative.

en effet :

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k X^k\right) * \left(\sum_{k=0}^{n} b_k X^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p}\right) X^k$$

D'autre part :

$$\left(\sum_{k=0}^{m} b_k X^k\right) * \left(\sum_{k=0}^{m} a_k X^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{p=0}^{k} b_p a_{k-p}\right) X^k$$

Par un changement de variable

$p' = k - p \Rightarrow p = k - p'$

on obtient l'égalité

et donc A est une algèbre de Banach unifère et commutative.

iii) Description de la boule unité ouverte de A.

$$B_A = \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right) \Big/ \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right\| < 1 \right\}$$

$$= \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right) \Big/ \sum_{k=0}^{n} |a_k| < 1 \right\}$$

iv) Description des idéaux bilatères fermés de A :

On sait qu'un idéal fermé est l'intersection des idéaux maximaux de $\mathbb{C}_n[X]$ et des idéaux maximaux de $\mathbb{C}_n[X]$ sont de la forme $\langle P \rangle$ avec P est irréductible.

ainsi :

I = idéal bilatère fermé de A

$\Rightarrow I = \cap \langle P \rangle$ avec P irréductible

~~une~~

$\boxed{V}$ On montre que :

$B = \{P \in \mathbb{C}_n[X] : P(0) = 0\}$

est un idéal bilatère fermé de A :

en effet :

Soient :

$Q(X) = \left(\sum_{k=0}^{m} a_k X^k\right) * P(X) \in \mathbb{C}_n[X]$

$P(X) \in \mathbb{C}_n[X]$

$$Q(X) = \left(\sum_{k=0}^{m} a_k X^k\right) * \left(\sum_{k=0}^{n} b_k X^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p}\right) X^k$$

$Q(0) = 0 \Rightarrow Q \in B$

ainsi B est un idéal à gauche

et puisque A est commutative

alors c'est un idéal bilatère.

montrons que B est fermé.
en effet :

soit : $(P(X))_n$ une suite, de polynomes de B_1 convergeant vers

$Q = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) \in \mathbb{C}_n[X]$

on a : $Q(0) = 0$

$\Rightarrow Q \in B_1$

aussi B_1 est fermé.

Vi) montrons que l'algèbre B_1 est isométriquement isomorphe à A.

En effet :
on considère l'homomorphisme isométrique
$\varphi : B_1 \longrightarrow A$ défini par :
tq : $\varphi(P) = P(0) = 0$
on peut donc identifier B_1 à l'idéal bilatère

à l'idéal bilatère :

$\{P \in \mathbb{C}_n[X] \,/\, P(0) = 0\}$ qui est

de codimension 1.