Nouvelle approche de résolution du théorème de Fermat

par Ahmed Idrissi Bouyahyaoui

Théorème de Fermat :

(1) « L'égalité $x^n+y^n=z^n$, où n, x, y, z $\in N^+$, est impossible pour n>2. »

**

Résumé :

Le présent article décrit une nouvelle approche de résolution du théorème de Fermat.

Comme tout nombre entier n>2 est multiple d'un nombre impair ou multiple de 4, on a, après transformation si nécessaire, la réduction sur n dans l'équation (1) :

n est un nombre impair ou n=4.

L'équation (1) est transformée en une équation du second degré où le discriminant doit être un carré parfait. Ce qui implique, pour n impair, une marge $m_1=x+y-z$ nulle, et, par conséquent, n=1, et pour n=4, une marge $m_2=x^2+y^2-z^2$ nulle, et, par conséquent, n=2.

Remarque : l'équation (1) implique x+y>z, z>x, z>y.

**

Pour n impair >1, en posant n=2s+1 dans l'équation (1) avec s $\in N^+$, on a :

(2) $x^{2s+1} + y^{2s+1} = z^{2s+1}$

En posant dans (2) $X=x^s$, $Y=y^s$ et $Z=z^s$, on a :

(3) $X^2x + Y^2y = Z^2z$

En posant m=X+Y-Z, on a :

(4) $X=m+Z-Y = m+u$, $Z-Y = u$

$Y=m+Z-X = m+v$, $Z-X = v$

$Z=X+Y-m = m+u+v = m+w$, $w=u+v$

En posant dans (3) X= m+u, Y= m+v et Z= m+w, on a :

$$(m+u)^2x + (m+v)^2y - (m+w)^2z = 0$$

qui après développement donne l'équation du second degré en m :

(5) $(x+y-z)m^2 + 2(ux+vy-wz)m + (u^2x+ v^2y- w^2z) = 0$ de discriminant :

(6) $\Delta = 4((ux+vy-wz)^2 - (x+y-z)(u^2x+ v^2y- w^2z)) = 4\Delta'$

En posant w=u+v dans (6), on a :

$$\Delta'= (ux+vy-(u+v)z)\hat{}2 - (x+y-z)(u^2x+ v^2y- (u+v)^2z)$$

Les calculs par wxMaxima 0.8.2 ou WolframAlpha donnent comme résultat final :

$$\Delta'= (xz-xy)v^2 + 2xyuv + (yz-xy)u^2$$

(7) $\Delta'= x(z- y)v^2 + y(z-x)u^2 + 2xyuv$ et Δ' doit être un carré parfait.

La forme de Δ' évoque le carré d'un binôme.

En mettant (7) sous la forme d'un trinôme du second degré en u, on a :

(8) $\Delta'= y(z-x)u^2 + 2xyvu + x(z- y)v^2$

Comme le trinôme (8) doit être un carré parfait, on a avec a, b $\in N^+$:

(9) $\Delta' = y(z-x)u^2 + 2xyvu + x(z-y)v^2 = (au + b)^2$

$(au + b)^2 = a^2u^2 + 2abu + b^2$

Par identification, on a :

$a^2 = y(z-x)$, $b^2 = x(z-y)v^2$, $2ab = 2xyv$

On en déduit :

$a^2b^2 = x^2y^2v^2 = y(z-x)x(z-y)v^2$ et après simplification :

$(z-x)(z-y) = xy$, $z^2 - z(x + y) = 0$, $z \neq 0$, on a :

(10) $x + y - z = 0$

La marge $m_1 = x+y-z$ est nulle et n=1.

L'hypothèse $x^{2s+1}+y^{2s+1}=z^{2s+1}$ implique $x^1+y^1=z^1$ (la somme dans N) et $x^{2s+1}+y^{2s+1}=z^{2s+1}$, conjonction impossible.

L'hypothèse est donc fausse, l'égalité $x^{2s+1}+y^{2s+1}=z^{2s+1}$ est impossible pour s>0.

**

Pour n=4, on a l'égalité :

(11) $x^4 + y^4 = z^4$

En posant m=x+y-z, on a :

(12) $x=m+z-y = m+u$, $z-y = u$

$y=m+z-x = m+v$, $z-x = v$

$z=x+y-m = m+z-y+z-x = m+u+v = m+w$, $w=u+v$

En posant partiellement dans (11) :

$x= m+u$, $y= m+v$ et $z= m+w$, on a :

(13) $(m+u)^2x^2 + (m+v)^2y^2 - (m+w)^2z^2 = 0$

Après développement, on a l'équation du second degré en m :

(14) $(x^2+y^2-z^2)m^2 + 2(ux^2+vy^2-wz^2)m + (u^2x^2+v^2y^2-w^2z^2) = 0$ de discriminant :

(15) $\Delta= 4((ux^2+vy^2-wz^2)^2 - (x^2+y^2-z^2)(u^2x^2+v^2y^2-w^2z^2))$

Avec w=u+v, on a :

$\Delta= 4((ux^2+vy^2-(u+v)z^2)^2 - (x^2+y^2-z^2)(u^2x^2+v^2y^2-(u+v)^2z^2)) = 4\Delta'$

Les calculs par wxMaxima 0.8.2 ou WolframAlpha donnent comme résultat final :

(16) $\Delta' = u^2y^2 (z^2 - x^2) + v^2x^2 (z^2 - y^2) + 2uvx^2y^2$ et Δ' doit être un carré parfait.

La forme de Δ' évoque le carré d'un binôme.

En mettant (16) sous la forme d'un trinôme du second degré en u, on a :

(17) $\Delta' = y^2(z^2 - x^2)u^2 + 2vx^2y^2u + v^2x^2(z^2 - y^2)$

Comme le trinôme (17) doit être un carré parfait, on a avec a, b $\in N^+$:

(18) $\Delta' = y^2(z^2 - x^2)u^2 + 2vx^2y^2u + v^2x^2(z^2 - y^2) = (au + b)^2$

$(au + b)^2 = a^2u^2 + 2abu + b^2$

Par identification, on a :

$a^2 = y^2(z^2 - x^2)$, $b^2 = v^2x^2(z^2 - y^2)$, $2ab = 2vx^2y^2$

On en déduit :

$a^2b^2 = v^2x^4y^4 = y^2(z^2 - x^2)v^2x^2(z^2 - y^2)$ et après simplification :

$(z^2 - x^2)(z^2 - y^2) = x^2y^2$, $z^4 - z^2(x^2 + y^2) = 0$, $z \neq 0$, on a :

(19) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

La marge $m_2=x^2+y^2- z^2$ est nulle et n=2.

L'hypothèse $x^4+y^4=z^4$ implique $x^2+y^2=z^2$ (le théorème de Pythagore) et $x^4+y^4=z^4$, conjonction impossible.

L'hypothèse est donc fausse, l'égalité $x^4+y^4=z^4$ est impossible.

**

En conclusion :

Si $x^n + y^n - z^n = 0$, $n, x, y, z \in N^+$, alors n=1 ou n=2.