

Recherche d'une preuve élémentaire du théorème de Fermat-Wiles

(pour n impair >1)

Par Ahmed Idrissi Bouyahyaoui

**

Théorème de Fermat-Wiles :

(1) « L'égalité $x^n + y^n = z^n$, où $n, x, y, z \in \mathbb{N}^+$, est impossible pour $n > 2$. »

**

Introduction :

La recherche d'une preuve élémentaire du TFW s'appuie sur le théorème de la factorisation des formes quadratiques binaires :

(2) "Une forme quadratique binaire q , de discriminant d , est factorisable en produit de deux formes linéaires si et seulement si d est un carré parfait."

Sans restreindre la généralité du problème, les nombres x, y, z sont supposés être premiers entre eux par paire et comme tout nombre entier $n > 2$ est multiple d'un nombre impair ou multiple de 4, on a après transformation si nécessaire, la réduction sur n dans l'équation (1) : $n =$ un nombre impair > 1 ou $n = 4$.

Comme x, y, z sont premiers entre eux, un seul est alors pair et, en se plaçant dans \mathbb{Z} , on peut supposer x pair, y et z sont alors impairs.

Recherche d'une preuve élémentaire :

De l'équation (1) on déduit :

$$(3) \quad x^n = (z-y)(z^{n-1} + z^{n-2}y + \dots + zy^{n-2} + y^{n-1})$$

et l'on voit que $(z-y)$ divise x^n .

En posant $z^{n-2}y + \dots + zy^{n-2} = (z^{n-3} + z^{n-4}y + \dots + zy^{n-4} + y^{n-3})zy$ dans (3), on a :

$$(4) \quad x^n = (z-y)(z^{n-1} + (z^{n-3} + z^{n-4}y + \dots + zy^{n-4} + y^{n-3})zy + y^{n-1})$$

Dans (4), en posant $(z^{n-3} + z^{n-4}y + \dots + zy^{n-4} + y^{n-3}) = a$ et en multipliant les deux membres par $z^{(n-3)/2}y^{(n-3)/2}$, on a :

$$(5) \quad x^n (zy)^{(n-3)/2} = (z-y) ((zy)^{(n-3)/2} z^{n-1} + a z^{(n-1)/2} y^{(n-1)/2} + (zy)^{(n-3)/2} y^{n-1})$$

et en multipliant les deux membres de (5) par zy , on a :

$$(6) \quad x^n (zy)^{(n-1)/2} = zy(z-y) ((zy)^{(n-3)/2} z^{n-1} + a z^{(n-1)/2} y^{(n-1)/2} + (zy)^{(n-3)/2} y^{n-1})$$

En posant, partiellement, dans (6) $Z = z^{(n-1)/2}$ et $Y = y^{(n-1)/2}$, on a :

$$(7) \quad x^n ZY = zy(z-y) ((zy)^{(n-3)/2} Z^2 + a ZY + (zy)^{(n-3)/2} Y^2)$$

Le nombre $r = x^n / zy(z-y)$ est rationnel et a , étant somme de $(n-2)$ termes impairs, est impair.

L'équation (7), associée à l'égalité (6) (hypothèse), comporte au premier membre un produit de deux formes linéaires rZY et au second membre une forme quadratique binaire $q(Z, Y)$.

En appliquant la réciproque du théorème (2), on a :

$$(8) \quad d = a^2 - 4(zy)^{(n-3)} = \text{carré parfait}$$

Le discriminant n'est pas nul car $\text{pgcd}(a, 2xy) = 1$.

Les nombres a et n étant impairs, d est impair et $(n-3)$ est pair, et l'on a :

d , étant impair et un carré parfait, on doit avoir $d \equiv 1 \pmod{8}$.

Avec (8) et, zy impair, $(zy)^{(n-3)} \equiv 1 \pmod{8}$

$$(9) \quad d \equiv 1 - 4 \equiv 5 \pmod{8}$$

Comme l'égalité $1 \equiv 5 \pmod{8}$ est impossible, le discriminant d n'est pas un carré parfait et, par suite, l'égalité (6), une solution de (7) et équivalente à (1), est impossible.

Ainsi, l'égalité $x^n + y^n = z^n$, où $n, x, y, z \in \mathbb{N}^+$, est impossible pour n impair > 1 .