Recherche d'une preuve élémentaire du théorème de Fermat-Wiles

(pour n impair >1)

Par Ahmed Idrissi Bouyahyaoui

**

Théorème de Fermat-Wiles :

(1) « L'égalité $x^n+y^n=z^n$, où n, x, y, z Є N^+, est impossible pour n>2. »

**

Introduction :

La recherche d'une preuve élémentaire du TFW s'appuie sur le théorème de la factorisation des formes quadratiques binaires :

(2) "Une forme quadratique binaire q, de discriminant d, est factorisable en produit de deux formes linéaires si et seulement si d est un carré parfait."

Sans restreindre la généralité du problème, les nombres x, y, z sont supposés être premiers entre eux par paire et comme tout nombre entier n>2 est multiple d'un nombre impair ou multiple de 4, on a après transformation si nécessaire, la réduction sur n dans l'équation (1) : n = un nombre impair>1 ou n = 4.

Comme x, y, z sont premiers entre eux, un seul est alors pair et, en se plaçant dans Z, on peut supposer x pair, y et z sont alors impairs.

Recherche d'une preuve élémentaire :

De l'équation (1) on déduit :

(3) $x^n = (z-y)(z^{n-1}+ z^{n-2}y+ \dots + zy^{n-2}+ y^{n-1})$, avec n = un nombre impair>1.

Les opérations suivantes ont pour but de faire apparaitre une structure d'un produit de deux formes linéaires dans le premier membre et une structure d'une forme quadratique binaire q(**Z**,**Y**) dans le second membre en vue de l'application du théorème de la factorisation (2).

En posant $z^{n-2}y+ \dots + zy^{n-2} = (z^{n-3}+ z^{n-4}y+ \dots +zy^{n-4} + y^{n-3})\mathbf{zy}$ dans (3), on a :

(4) $x^n = (z-y)(\mathbf{z^{n-1}}+(z^{n-3}+ z^{n-4}y+ \dots +zy^{n-4} + y^{n-3})zy + \mathbf{y^{n-1}})$

Dans (4), en posant $(z^{n-3}+ z^{n-4}y+ \dots +zy^{n-4} + y^{n-3})=a$ et en multipliant les deux membres par $z^{(n-3)/2}y^{(n-3)/2}$, on a :

(5) $x^n\, \mathbf{z^{(n-3)/2}}\, \mathbf{y^{(n-3)/2}} = (z-y)\, ((zy)^{(n-3)/2}\, \mathbf{z^{n-1}} + a\, \mathbf{z^{(n-1)/2}y^{(n-1)/2}} + (zy)^{(n-3)/2}\, \mathbf{y^{n-1}})$

et en multipliant les deux membres de (5) par zy, on a :

(6) $x^n\, \mathbf{z^{(n-1)/2}}\, \mathbf{y^{(n-1)/2}} = zy(z-y)\, ((zy)^{(n-3)/2}\, \mathbf{z^{n-1}} + a\, \mathbf{z^{(n-1)/2}y^{(n-1)/2}} + (zy)^{(n-3)/2}\, \mathbf{y^{n-1}})$

En remplaçant dans (6) $\mathbf{z^{(n-1)/2}}$ par U, $\mathbf{y^{(n-1)/2}}$ par V, $\mathbf{z^{n-1}}$ par U^2 et $\mathbf{y^{n-1}}$ par V^2, on a :

(7) $x^n\, UV= zy(z-y)\, ((zy)^{(n-3)/2}\, U^2 + a\, UV + (zy)^{(n-3)/2}\, V^2)$

où U et **V** sont des variables entières, les deux indéterminées de l'équation (7).

L'équation (7), associée à l'égalité (6) (hypothèse), a dans le premier membre un produit de deux formes linéaires rUV et dans le second membre une forme quadratique binaire :

(8) $q(U,V) = (zy)^{(n-3)/2} U^2 + a UV + (zy)^{(n-3)/2} V^2$ où U et V sont des variables entières.

Parmi l'ensemble des solutions de (7) il y a le couple ($U=z^{(n-1)/2}$, $V= y^{(n-1)/2}$) et on a l'égalité :

$x^n z^{(n-1)/2} y^{(n-1)/2} = zy(z-y) q(z^{(n-1)/2}, y^{(n-1)/2})$, c'est l'égalité (6) (hypothèse).

Le nombre $r=x^n/zy(z-y)$ est rationnel et a, étant somme de (n-2) termes impairs, est impair.

En appliquant la réciproque du théorème (2), q(U,V) étant factorisée par hypothèse, on a :

(9) $d = a^2 - 4(zy)^{(n-3)}$ = un carré parfait.

Le discriminant n'est pas nul car pgcd(a,2zy)=1.

Les nombres a et n étant impairs, d est impair et (n-3) est pair, et l'on a :

d, étant impair et un carré parfait, on doit avoir $d \equiv 1$ [8].

avec (9) et, zy impair, $(zy)^{(n-3)} \equiv 1$ [8]

(10) $d \equiv 1 - 4 \equiv 5$ [8]

Comme l'égalité $1 \equiv 5$ [8] est impossible, le discriminant d n'est pas un carré parfait et, par suite, d'après le théorème de la factorisation des formes quadratiques binaires, q(**Z**,**Y**) n'est pas factorisable en un produit de deux formes linéaires.

Par conséquent, l'équation (7) est fausse et, par suite, son associée, l'égalité (6), une solution de (7) et équivalente à (1), est impossible.

Ainsi, l'égalité $x^n+y^n=z^n$, où n, x, y, z $\in N^+$, est impossible pour n impair >1.