Nouvelle approche de résolution du théorème de Fermat-Wiles

par Ahmed Idrissi Bouyahyaoui

**

Théorème de Fermat-Wiles :

(1) « L'égalité $x^n+y^n=z^n$, où $n, x, y, z \in N^+$, est impossible pour n>2. »

**

Résumé :

Le document décrit une nouvelle approche de résolution du théorème de Fermat-Wiles.
La recherche de preuve s'appuie sur le théorème de Bachet –Bézout et sur le théorème de la factorisation des formes quadratiques binaires :

(2) "Une forme quadratique binaire q, de discriminant d, est factorisable en produit de deux formes linéaires si et seulement si d est un carré parfait."

Application du théorème de Bachet –Bézout :

Si une forme quadratique binaire est égale à un carré parfait, alors elle est factorisable en un produit de deux formes linéaires.

Application de la réciproque du théorème de la factorisation :

Si une forme quadratique binaire est factorisable en un produit de deux formes linéaires, alors son discriminant est un carré parfait.

Comme tout nombre entier n>2 est multiple d'un nombre impair ou multiple de 4, on a, après transformation si nécessaire, la réduction sur n dans l'équation (1) :

n est un nombre impair >1 ou n=4.

L'équation (1) est transformée en une équation du second degré où le discriminant doit être un carré parfait. Ce discriminant est une forme quadratique binaire égale à un carré parfait.

Par application des deux théorèmes cités ci-dessus, on a, pour n impair >1, $(x+y-z)xyz$ est un carré parfait, ce qui implique une marge $m_1=x+y-z$ nulle, et, par conséquent, n=1, et pour n=4, $(x^2+y^2-z^2)x^2y^2z^2$ et $(x^2+y^2-z^2)$ sont des carrés parfaits, ce qui implique une marge $m_2=x^2+y^2-z^2$ nulle, et, par conséquent, n=2.

**

Pour n impair >1, en posant n=2s+1 dans l'équation (1) avec $s \in N^+$, on a :

(3) $x^{2s+1} + y^{2s+1} = z^{2s+1}$

En posant dans (3) $X=x^s$, $Y=y^s$ et $Z=z^s$, on a :

(4) $X^2x + Y^2y = Z^2z$

En posant m=X+Y-Z, on a :

(5) $X=m+Z-Y = m+u$, $Z-Y = u$
$Y=m+Z-X = m+v$, $Z-X = v$
$Z=X+Y-m = m+u+v = m+w$, $w=u+v$

Sans restreindre la généralité du problème, on peut supposer x, y, z premiers entre eux par paire et, par suite, u, v, w sont premiers entre eux par paire.

En posant dans (4) X= m+u, Y= m+v et Z= m+w, on a :

(6) $(m+u)^2x + (m+v)^2y - (m+w)^2z = 0$

qui après développement donne l'équation du second degré en m :

(7) $(x+y-z)m^2 + 2(ux+vy-wz)m + (u^2x+ v^2y- w^2z) = 0$ de discriminant :

(8) $\Delta = 4((ux+vy-wz)^2 - (x+y-z)(u^2x+ v^2y- w^2z)) = 4\Delta'$

En posant w=u+v dans (8), on a :

$\Delta' = (ux+vy-(u+v)z)^{\wedge}2 - (x+y-z)(u^2x+ v^2y- (u+v)^2z)$

Les calculs donnent comme résultat final :

(9) $\Delta' = y(z-x)u^2 + 2xyuv + x(z-y)v^2$

Δ' est une forme quadratique q(u,v) égale à un carré parfait et, comme pgcd(u,v)=1, elle est factorisable en un produit de deux formes linéaires par application du théorème de Bachet-Bézout :

(10) $\Delta' = y(z-x)u^2 + 2xyuv + x(z-y)v^2 = (au + bv)(cu + dv)$, avec a, b, c, d $\in \mathbb{Z}$

Par application de la réciproque du théorème de la factorisation, on a le discriminant d qui est un carré parfait :

(11) $d = 4x^2y^2 – 4xy(z-x)(z-y) = 4xyz(x+y-z)$

Le nombre (x+y-z)xyz est un carré parfait pouvant être nul.

En posant m_1=x+y-z, on a :

(12) $x=m_1+z-y = m_1+u_1$, $z-y = u_1$

$y=m_1+z-x = m_1+v_1$, $z-y = v_1$

$z=x+y-m_1 = m_1+u_1+v_1 = m_1+w_1$, $w_1=u_1+v_1$

Comme pgcd(x,y,z) = 1, on a pgcd(u_1,v_1,w_1) = 1 et dans les deux triplets (x,y,z) et (u_1,v_1,w_1) un seul nombre est pair.

Dans (x+y-z)xyz, en posant $x+y-z = m_1$, $x = m_1+u_1$, $y = m_1+v_1$, $z = m_1+w_1$, on a :

(13) $m_1(m_1+u_1)(m_1+v_1)(m_1+w_1)$ qui doit être un carré parfait pouvant être nul.

En développant (13), on a :

$m_1^4 + (v_1+u_1+w_1)m_1^3 + (u_1w_1+u_1v_1+v_1w_1)m_1^2 + u_1v_1w_1m_1$

et en posant $u_1+v_1= w_1$, on a :

(14) $m_1^4 + (2w_1m_1 + w_1^2+u_1v_1)m_1^2+ u_1v_1w_1m_1$

Le nombre (14), étant un carré parfait, sa racine carrée est supérieure à m^2, elle est donc de la forme $m_1^2 + r$ avec $r \in N^+$ tel que :

(15) $m_1^4 + (2w_1m_1 + w_1^2+u_1v_1)m_1^2+ m_1u_1v_1w_1 = (m_1^2 + r)^2$ de développement :

(16) $m_1^4 + 2rm_1^2 +r^2$

Par identification des coefficients correspondants des deux expressions (15) et (16), on a :

(17) $2r = 2w_1m_1 + w_1^2+u_1v_1$

$r^2 = m_1u_1v_1w_1$

L'égalité (17)1 est impossible car le premier membre est pair et, puisque dans le triplet (u_1,v_1,w_1) un seul nombre est pair, le second membre est impair puisque, comme $w_1 = u_1+v_1$, $w_1^2+u_1v_1$ est impair.

Donc, le nombre (13), étant un carré parfait pouvant être nul, la seule issue est :

(18) $m_1 = x+y-z = 0$, ce qui implique : la marge $m_1 = x + y - z$ est nulle et n=1.

L'hypothèse $x^n + y^n = z^n$ implique $x + y = z$ (l'addition dans N^+) et $x^n + y^n = z^n$, conjonction impossible et, par conséquence, l'hypothèse initiale (3) est fausse.
Ainsi, l'égalité $x^{2s+1} + y^{2s+1} = z^{2s+1}$, où $x, y, z, s \in N^+$, est impossible.
**
**
Pour n=4, on a l'égalité :
(1) $x^4 + y^4 = z^4$
En posant m=x+y-z, on a :
(2) $x=m+z-y = m+u$, $z-y = u$
$y=m+z-x = m+v$, $z-x = v$
$z=x+y-m =m+z-y+z-x = m+u+v = m+w$, $w=u+v$
Sans restreindre la généralité du problème, on peut supposer x, y, z premiers entre eux par paire et, par suite, u, v, w sont premiers entre eux par paire.
En posant partiellement dans (1) :
$x= m+u$, $y= m+v$ et $z= m+w$, on a :
(3) $(m+u)^2x^2 + (m+v)^2y^2 - (m+w)^2z^2 = 0$
Après développement, on a l'équation du second degré en m :
(4) $(x^2+y^2-z^2)m^2 + 2(ux^2+vy^2-wz^2)m + (u^2x^2+v^2y^2-w^2z^2) = 0$ de discriminant :
(5) $\Delta= 4((ux^2+vy^2-wz^2)^2 - (x^2+y^2-z^2)(u^2x^2+v^2y^2-w^2z^2))$
En posant w=u+v dans (5), on a :
$$\Delta= 4((ux^2+vy^2-(u+v)z^2)^2 - (x^2+y^2-z^2)(u^2x^2+v^2y^2-(u+v)^2z^2)) = 4\Delta'$$
Les calculs donnent comme résultat final :
(6) $\Delta' = y^2(z^2 - x^2)u^2 + 2x^2y^2uv + x^2(z^2 - y^2)v^2$ qui doit être un carré parfait.
Δ' est une forme quadratique q(u,v) égale à un carré parfait et, comme pgcd(u,v)=1, elle est factorisable en un produit de deux formes linéaires par application du théorème de Bachet-Bézout :
(7) $\Delta' = y^2(z^2 - x^2)u^2 + 2 x^2y^2uv + x^2(z^2 - y^2)v^2 = (au + bv)(cu + dv)$, avec $a, b, c, d \in Z$
Par application de la réciproque du théorème de la factorisation, le discriminant d doit être un carré parfait :
(8) $d = 4x^4y^4- 4x^2y^2(z^2-x^2)(z^2-y^2) = -4 x^2y^2(z^4-(x^2+y^2)z^2) = 4 x^2y^2z^2(x^2+y^2-z^2)$
Le nombre $x^2y^2z^2(x^2+y^2-z^2)$ est un carré parfait pouvant être nul.
Remarque : $x^2y^2z^2$ étant un carré parfait, $x^2+y^2-z^2$ est un carré parfait.
En posant $m_2=x^2+y^2-z^2$, on a :
(9) $x^2=m_2+z^2-y^2 = m_2+u_2$, $z^2-y^2 = u_2$
$y^2=m_2+z^2-x^2 = m_2+v_2$, $z^2-y^2 = v_2$
$z^2=x^2+y^2-m_2 = m_2+u_2+v_2 = m_2+w_2$, $w_2=u_2+v_2$
Comme $pgcd(x^2,y^2,z^2) = 1$, on a $pgcd(u_2,v_2,w_2) = 1$ et dans les deux triplets (x^2,y^2,z^2) et (u_2,v_2,w_2) un seul nombre est pair.
Dans $(x^2+y^2-z^2)x^2y^2z^2$, en posant $x^2+y^2-z^2 = m_2$, $x^2 = m_2+u_2$, $y^2 = m_2+v_2$, $z^2 = m_2+w_2$, on a :
(10) $m_2(m_2+u_2)(m_2+v_2)(m_2+w_2)$ qui doit être un carré parfait pouvant être nul.
En développant (10) et en posant $u_2+v_2 = w_2$, on a :

(11) $m_2^4 + 2w_2m_2^3 + (w_2^2+u_2v_2)m_2^2 + u_2v_2w_2m_2$

Le nombre (11), étant un carré parfait, sa racine carrée est supérieure à m_2^2, elle est donc de la forme $m_2^2 + r$ avec $r \in N^+$ tel que :

(12) $m_2^4 + (2w_2m_2 + w_2^2+u_2v_2)m_2^2 + u_2v_2w_2\, m_2 = (m_2^2 + r)^2$ de développement :

(13) $m_2^4 + 2rm_2^2 + r^2$

Par identification des coefficients correspondants des deux expressions (13) et (14), on a :

(14) $2r = 2w_2m_2 + w_2^2+u_2v_2$

$r^2 = m_2u_2v_2w_2$

L'égalité (14)1 est impossible car le premier membre est pair et, puisque dans le triplet (u_2,v_2,w_2) un seul nombre est pair, le second membre est impair puisque, comme $w_2 = u_2+v_2$, $w_2^2+u_2v_2$ est impair.

Donc, le nombre (11) étant un carré parfait pouvant être nul, la seule issue est :

(15) $m_2 = x^2+y^2-z^2 = 0$

Ce qui implique : la marge $m_2 = x^2+y^2-z^2$ est nulle et n=2.

L'hypothèse $x^4 + y^4 = z^4$ implique $x^2 + y^2 = z^2$ (Théorème de Pythagore) et $x^4 + y^4 = z^4$, conjonction impossible et, par conséquence, l'hypothèse est fausse.

Ainsi, l'égalité $x^4 + y^4 = z^4$, où x, y, $z \in N^+$, est impossible.

**