DM n°2 : Intégrales

Exercice 1 : Questions diverses des examens des années précédentes

1. Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :
   (a) $\displaystyle\int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^4}}dt$,
   (b) $\displaystyle\int \ln(t^2+1)dt$,
   (c) $\displaystyle\int \frac{\cos t \sin t}{2+2\sin^2 t+\sin^4 t}dt$.
2. Calculer les intégrales suivantes :
   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \cos t\, dt$,
   (b) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln t}{t\left(1+(\ln t)^2\right)}dt$,
   (c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{t\sin(t^2)}{2+\cos(t^2)}dt$,
   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 t}{1+\sin^2 t}dt$,
   (e) $\displaystyle\int_0^{1} t\, 3^t\, dt$.

Exercice 2 : Intégrales de Wallis

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx$ si $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(I_n)_n$ est positive décroissante.
2. Montrer que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Expliciter I_n en séparant le cas n pair et le cas n impair. En déduire la valeur de $\int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n dx$.
4. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$, en utilisant que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.
5. Montrer que $(n+1)\, I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$; en déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
6. En déduire que $\dfrac{1.3...(2n+1)}{2.4...(2n)} \sim 2\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}$.
7. En déduire également la constante $C > 0$ de la formule de Stirling $n! \sim C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ quand $n \to +\infty$ (voir exercice 16 du TD 3).