DM 1

Exercice 1

On considère la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $\varphi : E \to E$ un endomorphisme de E.

1. Montrer que
$$\varphi^2 = 0 \iff \operatorname{Im}\varphi \subset \ker\varphi.$$
2. On suppose que $\varphi^2 = 0$.
   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de φ.
   (b) On suppose que φ est diagonalisable. Déterminer φ.
3. On suppose dorénavant que $\varphi^2 = 0$, et que φ n'est pas diagonalisable.
   (a) Montrer que $\operatorname{rg}(\varphi) \leq n/2$. À quelle condition a-t-on $\operatorname{Im}\varphi = \ker\varphi$?
   (b) Soit F un supplémentaire de $\ker\varphi$, et $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F.
      i. Montrer que $(e_1, \ldots, e_p, \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_p))$ est une famille libre.
      ii. Compléter cette famille en une base de E, à l'aide de vecteurs de $\ker\varphi$ (on précisera bien comment l'on choisit ces vecteurs).
      iii. Écrire la matrice de φ dans cette base.
4. Application :
   On considère φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 \\ -6 & -4 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ 12 & 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que $\varphi^2 = 0$. il suffit de faire A^2=A*A
   (b) Déterminer une base de vecteurs dans laquelle la matrice de φ est de la forme obtenue en 3(b)iii, et donner cette matrice.