4.3.3. Moment d'inertie d'un corps de révolution

Un corps de révolution est un solide engendré par la révolution d'une surface autour d'un axe.

Dans le cas de la recherche d'un moment d'inertie d'un corps de révolution, on peut se servir de la connaissance du moment d'inertie d'un cylindre par rapport à son axe de révolution (voir ***Application 4.12.***) pour se faciliter la tâche.

En effet, considérons le volume de révolution de la figure ci-contre (***fig. 4.33.***). En découpant ce volume, non pas en cylindres minces, mais en disques minces, on peut utiliser le résultat trouvér précédemment. Soit :

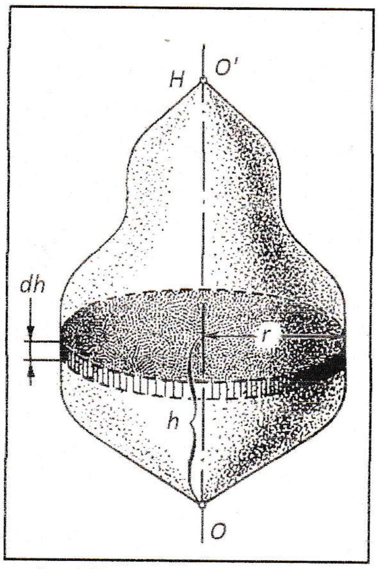

fig. 4.33. - Moment d'inertie d'un volume de révolution.

$$J_{\overline{OO'}} = \int_V \frac{1}{2} r^2 \, dm = \frac{1}{2} \int_V r^2 \, \rho \, dV$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^H r^2 \, \rho \left(\pi \, r^2 \, dh \right)$$

$$\boxed{J_{\overline{OO'}} = \frac{\pi}{2} \int_0^H r^4 \, \rho \, dh} \quad \textbf{\textit{(éq. 4.137.)}}$$

Si l'on connaît r et ρ comme fonction de h, on peut calculer le moment d'inertie du corps de révolution.

Application 4.13. Calculer le moment d'inertie d'un cône plein homogène de masse m, par rapport à son axe de révolution.

Solution :

Corps de révolution

Utilisons la formule ***éq. 4.137.***, soit :

$$J_{\overline{OO'}} = \frac{\pi}{2} \int_0^H r^4 \, \rho \, dh$$

Avec dans notre cas :

- ρ : constant
- $r = \frac{r_0}{H} h$

D'où :

$$J_{\overline{OO'}} = \frac{\pi}{2} \rho \left(\frac{r_0}{H} \right)^4 \int_0^H h^4 \, dh$$

$$= \frac{\pi}{2} \rho \left(\frac{r_0}{H} \right)^4 \frac{H^5}{5}$$

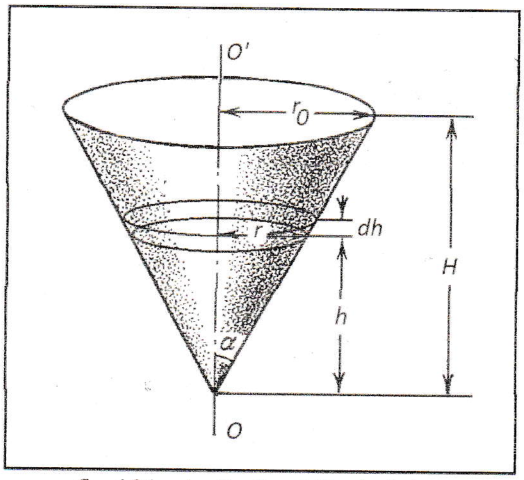

fig. 4.34. - Application 4.13. résolution.

Si l'on tient compte de ce que le volume du cône est égal à :

$$V_{cône} = \frac{1}{3} \pi \, r_0^2 \, H$$