

## Mines MP 2004 : Première Composition

## Calcul d'une intégrale

## I

1.  $\varphi$  est bien définie sur  $\mathbb{R}^*$ . Lorsque  $t$  tend vers 0,  $\arctan t \sim t$  et  $e^{\pi t} - 1 \sim \pi t$  donc  $\varphi(t)$  tend vers  $1/\pi$ .

$$\boxed{\varphi \text{ se prolonge par continuité en } 0 \text{ en posant } \varphi(0) = 1/\pi}$$

2.  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $D$ , de dérivée  $\varphi'(t) = \frac{e^{\pi t}}{(e^{\pi t} - 1)^2} \psi(t)$  où  $\psi$  est la fonction de l'énoncé.  $\varphi'(t)$  est du signe de  $\psi(t)$ .

Etudions les variations de  $\psi$  :  $\psi$  est  $C^1$  sur  $D$  et  $\psi'(t) = -\frac{1 - e^{-\pi t}}{(1 + t^2)^2} [\pi(1 + t^2) + 2t] < 0$  sur  $D$ .  $\psi$  est ainsi strictement décroissante sur  $D$  et de limite 0 en 0, donc elle est strictement négative sur  $D$  et  $\varphi'$  aussi.

$\varphi$  est donc strictement décroissante sur  $D$  et de limite  $1/\pi$  en 0 :

$$\boxed{\sup_D \varphi(t) = 1/\pi .}$$

3.  $\varphi$  est continue sur  $D$ .

Elle se prolonge par continuité en 0 donc elle est intégrable sur  $]0, 1[$ .

Quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ,  $\varphi(t) \sim \frac{\pi}{2} e^{-\pi t}$  donc  $\varphi(t) = o(1/t^2)$  donc  $\varphi$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

$\varphi$  est ainsi intégrable sur  $D$  :

l'intégrale  $I$  existe.

4.  $\forall t \in D \quad \varphi(t) = \frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}} \arctan t$ .

Puisque  $e^{-\pi t} \in [0, 1[$ ,  $\frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\pi t}$  et  $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\pi t} \arctan t$ .

Il s'agit d'une série de fonctions continues et positives sur  $D$  dont la somme  $\varphi$  est intégrable sur  $D$ . Donc (théorème de convergence monotone appliqué aux séries) chaque intégrale  $\int_0^{\infty} e^{-k\pi t} \arctan t dt$

existe (ce qui est d'ailleurs immédiat), la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-k\pi t} \arctan t dt$  converge, et  $I$  en est la somme.

En résumé, on peut intégrer terme à terme :

$$\boxed{I = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-k\pi t} \arctan t dt}$$

Intégrons par parties :

$$\int_0^{\infty} e^{-k\pi t} \arctan t dt = \lim_{X \rightarrow \infty} \left( \left[ \frac{e^{-k\pi t}}{-k\pi} \arctan t \right]_0^X + \frac{1}{k\pi} \int_0^X \frac{e^{-k\pi t}}{1 + t^2} dt \right)$$

Le crochet a pour limite 0 en  $+\infty$  donc toutes les limites existent :

$$\int_0^{\infty} e^{-k\pi t} \arctan t dt = \frac{1}{k\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k\pi t}}{1 + t^2} dt.$$

On conclut :

$$\boxed{I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k\pi t}}{1 + t^2} dt}$$

## II

5. Posons, pour  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(x, t) = \alpha_x(t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ .

Pour tout  $x$  réel,  $\alpha_x \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ .

Pour  $x < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_x(t) = +\infty$  donc  $\alpha_x$  est non intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f(x)$  n'est pas défini.

Pour  $x \geq 0$ ,  $0 \leq \alpha_x(t) \leq \frac{1}{1+t^2}$  donc  $\alpha_x$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $f(x)$  est défini.

Le domaine de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}_+$

$\alpha \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  et  $|\alpha(x, t)| \leq \beta(t) = \frac{1}{1+t^2}$  avec  $\beta$  continue intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  indépendante de  $x$ .

Dans ces conditions :

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$

Enfin  $0 \leq f(x) \leq \int_0^\infty e^{-xt} dt = 1/x$  donc :

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

6. Soit  $[a, b]$  un segment inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

$\alpha$  admet des dérivées partielles  $\frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t) = \frac{-te^{-xt}}{1+t^2}$  et  $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$  toutes deux continues, ainsi que  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ .

Chacune d'elles satisfait sur  $[a, b]$  à une hypothèse de domination par une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  :

$|\alpha(x, t)| \leq e^{-at}$ ,  $|\frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t)| \leq be^{-at}$  et  $|\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}(x, t)| \leq b^2 e^{-at}$  (par exemple).

Le théorème de Leibniz s'applique :

$f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $f'$  et  $f''$  se calculent en dérivant sous l'intégrale.

En particulier  $f''(x) = \int_0^\infty \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$  d'où :

$f''(x) + f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} dt = 1/x$ .

7. Par parties :  $S(X) = \left[ -\frac{\cos t}{t} \right]_a^X - \int_a^X \frac{\cos t}{t^2} dt$ .

D'une part,  $\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\cos X}{X} = 0$ .

D'autre part,  $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$  (continue et dominée par  $1/t^2$ ).

Donc :

$\lim_{X \rightarrow \infty} S(X)$  existe. Il en est de même pour  $\lim_{X \rightarrow \infty} C(X)$ .

8. L'équation homogène  $y'' + y = 0$  admet  $(\cos, \sin)$  pour système fondamental de solutions.

La méthode de variation des constantes donne les solutions de  $y'' + y = 1/x$  sous la forme  $A(x) \cos x + B(x) \sin x$  où  $A$  et  $B$  sont  $C^1$  avec  $A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = 0$  et  $-A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = 1/x$ .

Donc  $A'(x) = -\frac{1}{x} \sin x$  et  $B'(x) = \frac{1}{x} \cos x$ , d'où  $A(x) = g(x) + C$  et  $B(x) = -h(x) + D$ ,  $C$  et  $D$  constantes réelles.

La solution générale de  $y'' + y = 1/x$  est  $x \mapsto g(x) \cos x - h(x) \sin x + C \cos x + D \sin x$ ,  $(C, D) \in \mathbb{R}^2$ .

9.  $f$  est de la forme précédente et, de plus,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$ .  $\cos$  et  $\sin$  étant bornées,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) \cos x - h(x) \sin x) = 0$ .

Le couple  $(C, D)$  associé à  $f$  vérifie donc  $\lim_{x \rightarrow \infty} (C \cos x + D \sin x) = 0$ .

Avec  $x = 2n\pi$  puis  $x = 2n\pi + \pi/2$ , il vient  $C = D = 0$ .

$$\text{Donc } f(x) = g(x) \cos x - h(x) \sin x = \int_x^\infty \frac{\sin t \cos x - \cos t \sin x}{t} dt = \int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t} dt.$$

Les changements de variable affines  $u \mapsto t = u + x$  puis  $v \mapsto u = xv$  ( $x > 0$ ) donnent alors les expressions demandées :

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u+x} du = \int_0^\infty \frac{\sin(xv)}{1+v} dv.$$

### III

10. La question 4. a montré :  $I = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k\pi} f(k\pi)$ .

On vient de voir que  $f(k\pi) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u+k\pi} du = \int_0^\infty \frac{\sin kv}{v+\pi} dv$  (par  $v \mapsto u = kv$ ).

$$I = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k\pi} \int_0^\infty \frac{\sin ku}{u+\pi} du.$$

11. i) Commençons par une intégration par parties :

$$\int_0^\infty \frac{\sin ku}{u+\pi} du = \lim_{X \rightarrow \infty} \left( \left[ -\frac{\cos ku}{k(\pi+u)} \right]_0^X - \int_0^X \frac{\cos ku}{k(\pi+u)^2} du \right).$$

Les limites existent pour des raisons déjà rencontrées :

$$\int_0^\infty \frac{\sin ku}{u+\pi} du = \frac{1}{k\pi} - \int_0^\infty \frac{\cos ku}{k(\pi+u)^2} du$$

$$\text{donc } I = \sum_{k=1}^\infty \left( \frac{1}{k^2\pi^2} - \int_0^\infty \frac{\cos ku}{\pi k^2(\pi+u)^2} du \right).$$

On sait que cette série converge et  $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2\pi^2}$  aussi. Donc on peut écrire :

$$I = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \frac{\cos ku}{k^2(\pi+u)^2} du.$$

ii) Pour obtenir le résultat demandé, on utilise le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle

quelconque pour la série de fonctions  $\sum_{k \geq 1} \frac{\cos ku}{k^2(\pi+u)^2} = \sum_{k \geq 1} \varphi_k(u)$ .

Chaque fonction  $\varphi_k$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  car  $|\varphi_k(u)| \leq \frac{1}{k^2(\pi+u)^2} = O\left(\frac{1}{u^2}\right)$ .

La série  $\sum_{k \geq 1} \varphi_k(u)$  est convergente pour tout  $u \in \mathbb{R}_+$  car  $|\varphi_k(u)| \leq 1/k^2\pi^2$  et cette majoration établit même la convergence normale sur  $\mathbb{R}_+$ . Chaque fonction  $\varphi_k$  étant continue sur  $\mathbb{R}_+$ , il en est de même de la somme  $S$  de la série.

Enfin  $\int_0^\infty |\varphi_k(u)| du \leq \int_0^\infty \frac{du}{k^2(\pi+u)^2} = \frac{1}{k^2\pi}$ , donc la série  $\sum_{k \geq 1} \int_0^\infty |\varphi_k(u)| du$  converge.

Dans ces conditions,  $S$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\int_0^\infty S(u) du = \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \varphi_k(u) du$ .

$I$  devient donc :

$$I = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(\pi+u)^2} \left( \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos ku}{k^2} \right) du.$$

12. La définition de  $G$  est cohérente avec la  $2\pi$ -périodicité requise car  $G(2\pi) = \frac{\pi^2}{6} = G(0)$ .

La restriction de  $G$  au segment  $[0, 2\pi]$  est continue (car polynomiale), ce qui assure la continuité de  $G$  sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, la restriction de  $G$  à chaque segment  $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$  est de classe  $C^1$ , donc  $G$  est  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

Ces propriétés assurent (théorème de convergence normale) que la série de Fourier de  $G$  est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$  et que  $G$  en est la somme.

Pour  $x \in [0, 2\pi]$ ,  $G(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}x(2\pi - x)$ , d'où  $G(2\pi - x) = G(x)$  et par  $2\pi$ -périodicité  $G(-x) = G(x)$ . Les deux membres étant  $2\pi$ -périodiques, cette égalité sur  $[0, 2\pi]$  entraîne l'égalité sur  $\mathbb{R}$  :

$$\boxed{G \text{ est paire.}}$$

Par suite, les coefficients  $b_n(G)$  sont nuls.

$$a_0(G) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \right) dx = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi^3}{4} + \frac{\pi^3}{6} \right) = 0.$$

$$\text{Pour } n \geq 1, a_n(G) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \right) \cos nxdx.$$

$$\text{Par parties : } a_n(G) = -\frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \sin nxdx \quad (\text{le crochet est nul}).$$

$$\text{Par parties à nouveau : } a_n(G) = -\frac{2}{\pi n} \left[ -\left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\cos nx}{n} \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi -\frac{1}{2} \frac{\cos nx}{n} dx.$$

$$\text{Et finalement } a_n(G) = \frac{1}{n^2} \quad (\text{l'intégrale est nulle}).$$

La série de Fourier de  $G$  est donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$  (on constate bien, comme prévu, sa convergence normale).

On a déjà dit que  $G$  en est la somme :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

13. On vient de justifier que  $\forall x \in [0, 2\pi]$   $T(x) = G(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$ .

En particulier, pour  $x = 0$  :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

14. Par translation sur la variable et  $2\pi$ -périodicité de  $G$  :

$$a_k = \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{G(u)}{(\pi + u)^2} du = \int_0^{2\pi} \frac{G(u)}{(\pi + 2k\pi + u)^2} du.$$

$$\text{Par parties, puisque, sur } [0, 2\pi], G'(u) = \frac{u - \pi}{2} : a_k = \left[ -\frac{G(u)}{\pi + 2k\pi + u} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{u - \pi}{2(\pi + 2k\pi + u)} du.$$

En écrivant  $u - \pi = \pi + 2k\pi + u - (2\pi + 2k\pi)$  :

$$a_k = \frac{\pi}{6} \left( \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) + \pi - \int_0^{2\pi} \frac{2\pi + 2k\pi}{2(\pi + 2k\pi + u)} du.$$

Et finalement :

$$\boxed{a_k = \frac{\pi}{6} \left( \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) + \pi - (k+1)\pi \ln \left( \frac{2k+3}{2k+1} \right).$$

15. L'existence de  $\int_0^\infty \frac{1}{(\pi + u)^2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ku}{k^2} \right) du$  garantit la convergence de la série  $\sum_{k \geq 0} a_k$  et l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \int_0^\infty \frac{1}{(\pi + u)^2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ku}{k^2} \right) du.$$

Avec le calcul de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , l'expression de  $I$  obtenue au 11. se transforme donc en :

$$I = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\pi}{6} \left( \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) + \pi - (k+1)\pi \ln \left( \frac{2k+3}{2k+1} \right) \right).$$

Or  $\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) = 1$  (série télescopique), donc :

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} (-1 + (k+1) \ln \left( \frac{2k+3}{2k+1} \right)) \text{ et cette série converge comme } \sum_{k \geq 0} a_k.$$

$$16. \text{ Soit donc } E_N = \exp(I_N) = e^{-N} \prod_{n=0}^{N-1} \left( \frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1} = e^{-N} \frac{\prod_{n=1}^N (2n+1)^n}{\prod_{n=0}^{N-1} (2n+1)^{n+1}}.$$

$$\text{En simplifiant : } E_N = e^{-N} \frac{(2N+1)^N}{\prod_{n=0}^{N-1} (2n+1)}.$$

$$\text{Le dénominateur est } 1.3.5\dots(2N-1) = \frac{(2N)!}{2.4\dots(2N)} = \frac{(2N)!}{2^N N!} \text{ donc } E_N = e^{-N} \frac{2^N N! (2N+1)^N}{(2N)!}.$$

$$\text{Avec la formule de Stirling : } N! \sim_{\infty} \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \text{ et } (2N)! \sim_{\infty} \sqrt{4\pi N} (2N)^{2N} e^{-2N}.$$

$$\text{D'où } E_N \sim_{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(2N+1)^N}{(2N)^N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{1}{2N} \right)^N.$$

$$\text{Comme } \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2N} \right)^{2N} = e, \text{ on obtient } \lim_{N \rightarrow \infty} E_N = \sqrt{\frac{e}{2}}.$$

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} I_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln(E_N) \text{ donc :}$$

$$I = \frac{1}{2} (1 - \ln 2)$$

$$17. \frac{1}{e^{2\pi t} - 1} = \frac{1}{(e^{\pi t} - 1)(e^{\pi t} + 1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{e^{\pi t} - 1} - \frac{1}{e^{\pi t} + 1} \right).$$

$$\text{Dès lors, les intégrabilités étant acquises ; } J = \frac{1}{2}(I - K) \text{ donc } K = I - 2J.$$

Avec la valeur fournie pour  $J$  :

$$K = \frac{1}{2} (\ln \pi - 1)$$