

MATHÉMATIQUES

(Épreuve commune aux ENS : Lyon et Cachan)

DURÉE : 4 heures

*Énoncé saisi par M. Quercia (michel.quercia@prepas.org) d'après le texte original.*L'espace \mathbb{C}^n est considéré muni de sa structure hermitienne, c'est à dire du produit hermitien

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$$

et de la norme

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace des matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{C} . On identifie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ des applications linéaires de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C}^n . On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de sa structure naturelle d'algèbre involutive, c'est-à-dire :

- de sa structure de \mathbb{C} -espace vectoriel,
- du produit usuel des matrices,
- de l'involution $A \mapsto A^*$ avec

$$(A^*)_{i,j} = \overline{A_{j,i}}.$$

On rappelle que A^* comme opérateur sur \mathbb{C}^n est caractérisé par

$$\langle x, Ay \rangle = \langle A^*x, y \rangle$$

pour tous $x, y \in \mathbb{C}^n$. On a alors, $(A^*)^* = A$ et $(AB)^* = B^*A^*$, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.Une matrice A est dite *auto-adjointe* si elle vérifie $A^* = A$.

On rappelle que toute matrice auto-adjointe a ses valeurs propres réelles et se diagonalise dans une base orthonormée pour le produit hermitien.

On rappelle enfin que la norme usuelle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est donnée par

$$\|A\| = \sup\{\|Av\|; v \in \mathbb{C}^n, \|v\| = 1\}.$$

I. Normes**1a)** Calculez la norme d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est diagonale dans la base canonique.**1b)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $D = A^*A$. Montrez que toutes les valeurs propres de D sont positives.**1c)** Montrez que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a

$$\|A\| = \sqrt{\max\{\mu_j; j = 1, \dots, n\}}$$

où μ_1, \dots, μ_n sont les valeurs propres de $D = A^*A$.**1d)** Montrez que $\|A^*A\| = \|A\|^2$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**2)** Soit m une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $m(A^*A) = m(A)^2$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $D = A^*A$.**2a)** Soient $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$ les valeurs propres de D . Montrez que

$$\mu_1 = \inf \left\{ r \in \mathbb{R}^{+*}; \lim_{\ell \rightarrow +\infty} m \left(\left(\frac{1}{r} D \right)^{2^\ell} \right) = 0 \right\}.$$

2b) Montrez que la seule norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifie $m(A^*A) = m(A)^2$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, est la norme usuelle $\| \cdot \|$.

II. Commutants

Soit \mathcal{S} une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. On dit que \mathcal{S} est *auto-adjointe* si pour tout $A \in \mathcal{S}$ on a $A^* \in \mathcal{S}$.

Si \mathcal{S} est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, contenant la matrice identité I , et si \mathcal{S} est auto-adjointe, on dit que \mathcal{S} est une *sous *-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$* .

Pour toute sous *-algèbre \mathcal{S} de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\begin{aligned}\mathcal{S}' &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}); AS = SA \text{ pour tout } S \in \mathcal{S}\} \\ \mathcal{S}'' &= (\mathcal{S}')' \\ &\vdots \\ \mathcal{S}^{(m+1)} &= (\mathcal{S}^{(m)})' \\ &\vdots\end{aligned}$$

1) Montrez que \mathcal{S}' est une sous *-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) Montrez que

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'' = \mathcal{S}^{(4)} = \dots = \mathcal{S}^{(2m)} = \dots$$

et que

$$\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}''' = \dots = \mathcal{S}^{(2m+1)} = \dots$$

3) Soit E un sous-espace de \mathbb{C}^n et P_E le projecteur orthogonal de \mathbb{C}^n sur E . On dit que E est *invariant* par \mathcal{S} si $AE \subset E$ pour tout $A \in \mathcal{S}$ (avec $AE = \{Av; v \in E\}$). Montrez que E est invariant par \mathcal{S} si et seulement si $P_E \in \mathcal{S}'$.

4) Soit $\mathcal{K} = \mathbb{C}^{n^2}$. On identifie \mathcal{K} à $\mathbb{C}^n \times \dots \times \mathbb{C}^n$ en identifiant le vecteur (x_1, \dots, x_{n^2}) au vecteur (X_1, \dots, X_n) , où $X_i = (x_{(i-1)n+1}, \dots, x_{in})$. On identifie ainsi $\mathcal{L}(\mathcal{K}) = \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{C})$ à $\mathcal{M}_n(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ (les matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Soit

$$\Pi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{K}) \\ & & \left(\begin{array}{cccc} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{array} \right) \end{cases}.$$

Soit (v_1, \dots, v_n) une famille d'éléments de \mathbb{C}^n et

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{K}.$$

Soit maintenant \mathcal{S} une sous *-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\Pi(\mathcal{S})v = \{\Pi(A)v; A \in \mathcal{S}\}$.

4a) Montrez que $\Pi(\mathcal{S})v$ est un sous-espace vectoriel de \mathcal{K} .

Soit P le projecteur orthogonal de \mathcal{K} sur $\Pi(\mathcal{S})v$.

4b) Montrez que $P \in \Pi(\mathcal{S})'$ (le ' est sous-entendu dans $\mathcal{L}(\mathcal{K})$).

4c) Montrez que $\Pi(\mathcal{S})' = \mathcal{M}_n(\mathcal{S}')$.

4d) Montrez que $\Pi(\mathcal{S}'') \subset \mathcal{M}_n(\mathcal{S}')'$.

4e) Soit $B \in \mathcal{S}''$, montrez que $\Pi(\mathcal{S})v$ est stable par $\Pi(B)$.

4f) En déduire que $\mathcal{S} = \mathcal{S}''$.

5) Soit \mathcal{S} une sous *-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

5a) Montrez que si $A \in \mathcal{S}$ vérifie $A^* = A$, alors A s'écrit

$$A = \sum_{k=1}^{\ell} \mu_k P_k$$

où $\mu_1, \dots, \mu_\ell \in \mathbb{R}$ et où les P_k sont des projecteurs orthogonaux qui *appartiennent* à \mathcal{S} .

b) En déduire que si \mathcal{S} est une sous $*$ -algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui n'admet pas d'espace invariant E autre que $\{0\}$ et \mathbb{C}^n , alors $\mathcal{S} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (indication : montrez que \mathcal{S}' est réduit aux multiples de l'identité).

III. Algèbres de Clifford

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'algèbre $\mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C}) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^{2^n})$. On choisit une base orthonormée quelconque de \mathbb{C}^{2^n} , mais on choisit de l'indexer par \mathcal{P} , l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\}$. Soit $\{e_A, A \in \mathcal{P}\}$ une telle base orthonormée. Pour tout $A \in \mathcal{P}$ on définit l'application linéaire a_A par

$$a_A e_B = \begin{cases} e_{B \setminus A} & \text{si } A \subset B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $B \in \mathcal{P}$.

1a) Dans le cas $n = 1$, écrire la matrice de $a_{\{1\}} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Dans le cas $n = 2$, écrire les matrices de $a_{\{1\}}$ et de $a_{\{2\}} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

1b) Dans le cas général, montrez que a_A^* est donné par

$$a_A^* e_B = \begin{cases} e_{B \cup A} & \text{si } A \cap B = \emptyset \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1c) On considère \mathcal{S}_n le sous-espace de $\mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C})$ formé par les combinaisons linéaires de matrices de la forme $a_A^* a_B$, $A, B \in \mathcal{P}$. Montrez que \mathcal{S}_n est une sous $*$ -algèbre de $\mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C})$.

1d) Montrez que $\mathcal{S}_n = \mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C})$.

2) Dans le cas $n = 1$, on note $\Omega = e_\emptyset$, $a = a_{\{1\}}$ et $w(z) = \exp(za^* - \bar{z}a)$, pour $z \in \mathbb{C}$.

Dans le cas général on note $\Omega_n = e_\emptyset$,

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(a_{\{1\}} + \dots + a_{\{n\}})$$

et $W_n(z) = \exp(zB_n^* - \bar{z}B_n)$, pour $z \in \mathbb{C}$.

2a) Montrez que $W_n(z) = \exp\left(\frac{za_{\{1\}}^* - \bar{z}a_{\{1\}}}{\sqrt{n}}\right) \dots \exp\left(\frac{za_{\{n\}}^* - \bar{z}a_{\{n\}}}{\sqrt{n}}\right)$.

2b) Montrez que, pour tous polynômes P_1, P_2, \dots, P_n à une variable, on a

$$\langle \Omega_n, P_1\left(\frac{za_{\{1\}}^* - \bar{z}a_{\{1\}}}{\sqrt{n}}\right) \dots P_n\left(\frac{za_{\{n\}}^* - \bar{z}a_{\{n\}}}{\sqrt{n}}\right) \Omega_n \rangle = \langle \Omega, P_1\left(\frac{za^* - \bar{z}a}{\sqrt{n}}\right) \Omega \rangle \dots \langle \Omega, P_n\left(\frac{za^* - \bar{z}a}{\sqrt{n}}\right) \Omega \rangle.$$

2c) En déduire que $\langle \Omega_n, W_n(z) \Omega_n \rangle = \langle \Omega, w(z/\sqrt{n}) \Omega \rangle^n$.

2d) En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Omega_n, W_n(z) \Omega_n \rangle$.