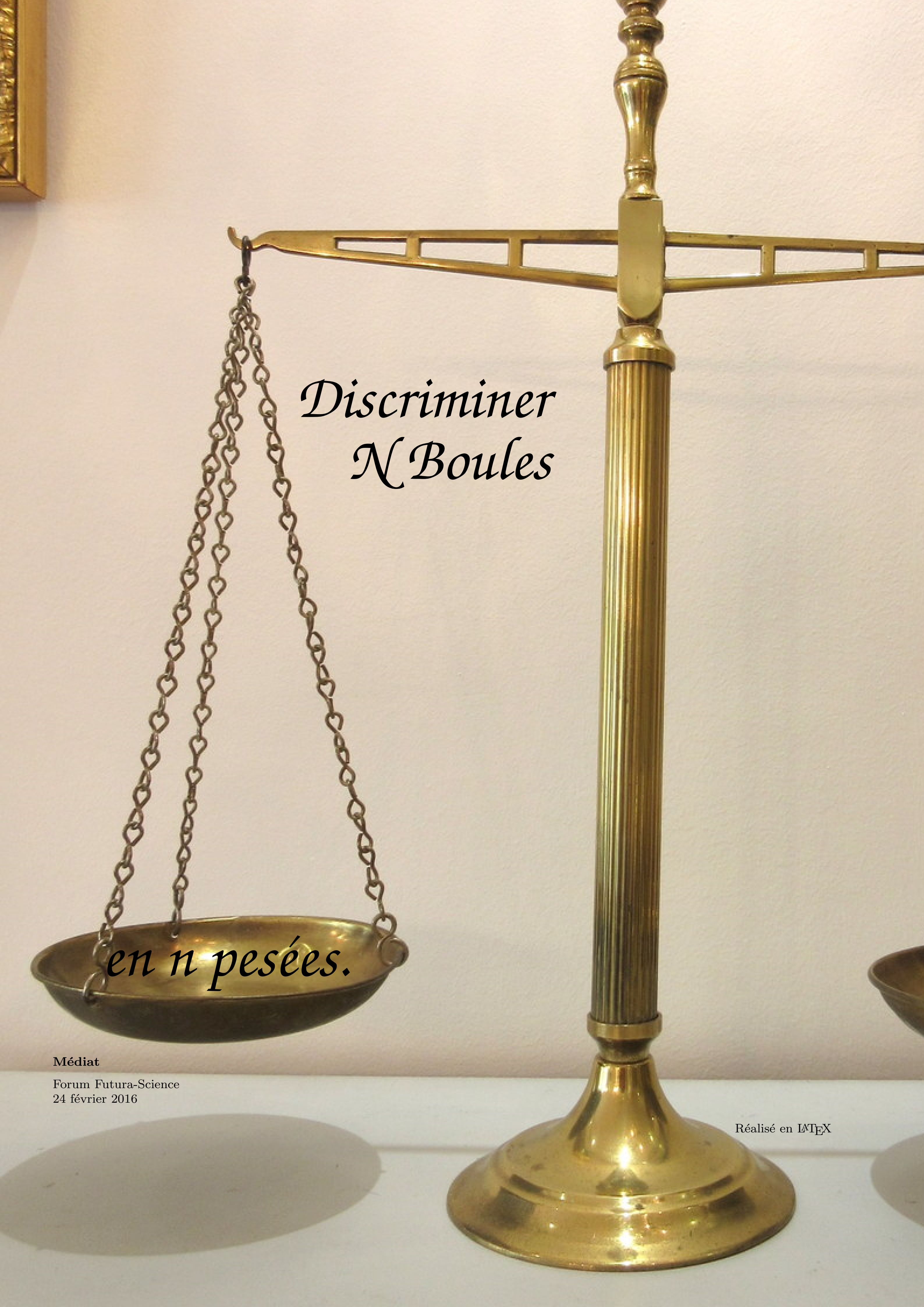

Discriminer N Boules en n pesées.

Médiat

Forum Futura-Science
24 février 2016

Réalisé en $\LaTeX$

Problème : Soit un ensemble de N boules toutes faisant le même poids, qui est un poids de référence (les boules faisant le poids de référence seront appelées « Normales »), dont exactement une (on peut étendre la question, sans rien changer aux calculs ci-dessous, à « au plus une »[1]) est d'un poids différent du poids de référence (nous préférons cette façon de décrire le problème, car la formulation « d'un poids différent des autres » n'a pas de sens tant qu'il n'y a pas au moins 3 boules). En combien de pesées (sur une balance type Roberval, sans étalon de poids (les seules informations possibles après une pesée sont « penche à gauche », « étal » ou « penche à droite ») peut-on déterminer la boule qui n'a pas le poids de référence et préciser si elle est plus lourde ou plus légère que le poids de référence ?

1. Quelle est la valeur maximale de N, pour un nombre n de pesées donné.
2. Quelles pesées doit-on effectivement faire pour déterminer la boule différente des autres et préciser si elle est plus lourde ou plus légère.

Le point 1) a été traité dans le document précédent « Boules.pdf » ; le résultat est qu'en n pesées on peut résoudre le problème avec $N = \dfrac{3^n - 3}{2}$, nous retrouverons ce résultat ci-dessous.

Le but de ce document est surtout de résoudre le point 2 **sans mettre en place d'algorithme**, mais en présentant, **a priori**, l'ensemble des pesées et un décodage permettant de répondre à la question.

On peut facilement résoudre deux cas particuliers :

1. N = 1 : impossible quel que soit le cas (on ne peut même pas faire de pesée).
2. N = 2 : impossible sauf si les deux boules sont normales (il n'y a qu'une seule pesée possible et elle ne permet pas de savoir si une des boule est plus lourde que le poids de référence, ou si c'est l'autre qui est plus légère).

Nous allons présenter le cas où N est maximale c'est à dire $N = \dfrac{3^n - 3}{2}$, pour $n \geq 2$ puisqu'en une pesée, on ne peut rien déterminer.

Nous allons étudier le cas « exactement une boule » ne fait pas le poids de référence, pour traiter le cas « au plus une boule » , il n'y a rien à changer aux calculs, ni aux pesées, il suffit d'interpréter le cas « Toutes les pesées sont étales » comme indiquant que toutes les boules font le poids de référence.

Le résultat de n pesées est donc représenté par une suite de n caractères choisis parmi $\{\mathcal{G}, \mathcal{E}, \mathcal{D}\}$ qui peu s'interpréter comme un nombre écrit en base 3, mais plutôt que de considérer que $\mathcal{G} = 0$, $\mathcal{E} = 1$ et $\mathcal{D} = 2$, le codage choisi est : $\mathcal{G} = -1$, $\mathcal{E} = 0$ et $\mathcal{D} = 1$. Le Maximum est donc $\dfrac{3^n - 1}{2} = N + 1$ et par voie de conséquence, le Minimum est $-\dfrac{3^n - 1}{2} = -(N + 1)$

Faire le choix des boules à mettre à gauche et à droite dans chaque pesée revient à choisir ce qui doit se passer dans le cas où chaque boule est, successivement, la boule la plus lourde ; en effet, dans le cas où elle serait plus légère, toutes les pesées seraient inversées ($\mathcal{G} \leftrightarrow \mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ reste inchangé), avec la codification décrite ci-dessus, inverser une pesée, revient à inverser son code.

Par conséquent, si une configuration est choisie pour déterminer qu'une boule est plus lourde, la configuration inverse ne peut être choisie pour identifier qu'une autre boule est plus lourde, puisque cette configuration inverse identifie que la première boule choisie est plus légère, autrement dit si un code est choisi, -code ne peut pas l'être, de plus pour qu'une pesée soit acceptable, il faut mettre autant de boules coté gauche que coté droit, pour qu'un ensemble de pesées soit acceptable il faut que toutes les pesées soient acceptables, il doit donc y avoir autant de $\mathcal{G}$ que de $\mathcal{D}$ pour chaque pesée (le total des codes choisie doit être nul mais ce n'est pas suffisant).

Il est clair qu'en n pesées on peut générer $3^n - 1$ codes (en éliminant le cas où toutes les boules sont normales), chaque boule pouvant être trop lourde ou trop légère, on a donc $2N \leq 3^n - 1$, si on pouvait résoudre le problème avec $\dfrac{3^n - 1}{2}$ boules et que dans la première pesée, on place k boules à gauche, il faudrait

1. Si toutes les boules sont du poids de référence, toutes les pesées sont étales.

placer $3^{n-1} - k$ boules à droites, et de plus on doit avoir $k = 3^{n-1} - k$, ce qui est impossible, il faut donc supprimer une configuration et sa configuration symétrique c'est à dire une boule, on doit donc imposer $N \leq \dfrac{3^n - 1}{2} - 1 = \dfrac{3^n - 3}{2}$, et nous allons montrer que ce maximum est effectivement atteint.

Les pesées mettent systématiquement en place $\dfrac{N}{3}$ boules dans chaque plateau [2], la balance peut, à chaque pesée, pencher à gauche (noté $\mathcal{G}$), être étal (noté $\mathcal{E}$) ou pencher à droite (noté $\mathcal{D}$).

Nous noterons $\overline{\mathcal{G}}$ (resp. $\overline{\mathcal{E}}$, $\overline{\mathcal{D}}$) pour indiquer que $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$) est répété autant de fois que nécessaire.

Solution : Nous allons décrire une solution par récurrence, en notant E_n l'ensemble des suites définissant qu'une boule est plus lourde que la référence (un élément de E_n est donc une suite de n lettres choisies parmi $\{\mathcal{G}, \mathcal{E}, \mathcal{D}\}$)

Pour $E_1 = \emptyset$, l'ensemble des suites définissant qu'une boule est trop lourde est vide.

A partir de E_n, on fabrique E_{n+1} la façon suivante :

1. Pour chaque élément $\mathcal{X}$ de E_n, on ajoute $\mathcal{G}$ à la fin de $\mathcal{X}$ ce qui donne $\mathcal{XG}$.
2. Pour chaque élément $\mathcal{X}$ de E_n, on ajoute $\mathcal{E}$ à la fin de $\mathcal{X}$ ce qui donne $\mathcal{XE}$.
3. Pour chaque élément $\mathcal{X}$ de E_n, on ajoute $\mathcal{D}$ à la fin de $\mathcal{X}$ ce qui donne $\mathcal{XD}$.
4. On ajoute $\{\overline{\mathcal{E}}\mathcal{G}, \overline{\mathcal{D}}\mathcal{E}, \overline{\mathcal{G}}\mathcal{D}\}$

Il est aisé de vérifier que E_{n+1} ne contient aucun code et son symétrique, et que si E_n ne contient ni $\overline{\mathcal{G}}$, ni $\overline{\mathcal{E}}$, ni $\overline{\mathcal{D}}$, E_{n+1} ne les contient pas non plus.

De façon triviale, si E_n est acceptable, E_{n+1} aussi.

Comme vu ci-dessus, $E_1 = \emptyset$, en appliquant la récurrence ci-dessus, nous constatons que les 3 premières règles ne donnent aucun élément et que la règle 4 donne $E_2 = \{\mathcal{EG}, \mathcal{DE}, \mathcal{GD}\}$

(le choix du N° de boule dans la dernière colonne est purement arbitraire, nous avons choisi la solution la plus naturelle) :

Pesée		Code	Boule
$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$	-4	Impossible
$\mathcal{G}$	$\mathcal{E}$	-3	3 Légère
$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	-2	2 Lourde
$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	-1	1 Lourde
$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$	0	Impossible
$\mathcal{E}$	$\mathcal{D}$	1	1 Légère
$\mathcal{D}$	$\mathcal{G}$	2	2 Légère
$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	3	3 Lourde
$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	4	Impossible

A noter que le cas 0 pourrait correspondre au cas où toutes les boules sont du même poids.

Pour déterminer effectivement les pesées (deux ici), il suffit de placer les boules « lourdes » du côté identifié par le code choisi :

$$\llcorner\ 3\ \lrcorner \quad \uparrow \quad \llcorner\ 2\ \lrcorner$$

$$\llcorner\ 2\ \lrcorner \quad \uparrow \quad \llcorner\ 1\ \lrcorner$$

Pour calculer E_3 à partir de E_2 : $\begin{cases} \text{la règle 1 donne :} & \{\mathcal{GDG}, \mathcal{EGG}, \mathcal{DEG}\} \\ \text{la règle 2 donne :} & \{\mathcal{GDE}, \mathcal{EGE}, \mathcal{DEE}\} \\ \text{la règle 3 donne :} & \{\mathcal{GDD}, \mathcal{EGD}, \mathcal{DED}\} \\ \text{la règle 4 donne :} & \{\mathcal{EEG}, \mathcal{DDE}, \mathcal{GGD}\} \end{cases}$

2. N est bien divisible par 3.

Pesée			Code
$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{G}$	-7
$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$	-4
$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	8

Pesée			Code
$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	-6
$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{E}$	-3
$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$	9

Pesée			Code
$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	-5
$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	-2
$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{D}$	10

$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	-1

$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	12

$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	-11

Nous n'avons listé que le contenu de E_3, c'est à dire les codes pour les boules lourdes, les codes pour les boules légères correspondent à la même suite dont les rôles de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{D}$ sont intervertis.

Et donc les pesées :

$$\lfloor 5 \mid 6 \mid 7 \mid 11 \rfloor \quad \uparrow \quad \lfloor 8 \mid 9 \mid 10 \mid 12 \rfloor$$

$$\lfloor 2 \mid 3 \mid 4 \mid 11 \rfloor \quad \uparrow \quad \lfloor 5 \mid 6 \mid 7 \mid 12 \rfloor$$

$$\lfloor 1 \mid 4 \mid 7 \mid 8 \rfloor \quad \uparrow \quad \lfloor 2 \mid 5 \mid 10 \mid 11 \rfloor$$

Cette méthode de construction des suites permet de montrer que le nombre maximum de boules que l'on peut discriminer en n pesées est bien $\dfrac{3^n-3}{2}$, et elle est même constructive, par contre elle présente un défaut : elle est récurrente, c'est à dire que pour calculer E_{10}, il faut avoir calculé E_9 ce qui nécessite d'avoir calculé E_8, etc.

Nous allons présenter une méthode permettant de préparer les n pesées sans passer par les cas précédents.

Soit C_n, l'ensemble des codes correspondant aux suites E_n, par construction E_n ne contient que des nombres compris entre $-(N-1)$ et $(N-1)$, sauf 0, en effet les suites $\overline{\mathcal{G}}$, $\overline{\mathcal{E}}$ et $\overline{\mathcal{D}}$ sont exclues.

Soit $|C_n|$ l'ensemble des valeurs absolues des nombres de C_n, alors $|C_n|$ contient tous les nombres entre 1 et $(N-1)$, pour définir C_n (et donc E_n), il suffit de déterminer le signe de chacun de ces nombres.

D'abord nous allons construire C_n (pour $n \geq 2$)par récurrence (puis nous l'expliciterons) :
$C_2 = \{-1, -2, 3\}$

Pour construire C_{n+1}, il suffit de voir comment on a construit E_{n+1} à partir de E_n :

1. Ajouter $\mathcal{G}$, $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{D}$ à la fin d'une suite $\mathcal{X}$ revient à multiplier par 3 le code de $\mathcal{X}$ et à ajouter -1, 0 ou 1.
2. Ajouter $\overline{\mathcal{E}}\mathcal{G}$ revient à ajouter -1
3. Ajouter $\overline{\mathcal{D}}\mathcal{E}$ revient à ajouter $\dfrac{3^{n+1}-3}{2}$
4. Ajouter $\overline{\mathcal{G}}\mathcal{D}$ revient à ajouter $-\dfrac{3^{n+1}-5}{2}$

Remarque : Si les nombres compris entre x et y (avec $x < y$) sont positifs (resp. négatifs) dans C_n, alors tous les nombres compris entre $3x-1$ et $3y+1$ sont positifs (resp. négatifs) dans C_{n+1}).

Notons :
$u_0^{(n)}$, le nombre de nombres négatifs successifs dans C_n à partir de -1 (qui appartient à C_n par construction).
$u_1^{(n)}$, le nombre de nombres positifs successifs dans C_n à la suite des précédents (en valeur absolue).
$u_2^{(n)}$, le nombre de nombres négatifs successifs dans C_n à la suite des précédents (en valeur absolue).
$\cdots$
$u_{2n-3}^{(n)}$ le nombre de nombres positifs successifs dans C_n à la suite des précédents (en valeur absolue).
Pour le cas $n=2$, on a $u_0^{(2)} = 2$ et $u_2^{(2)} = 1$.
Pour le cas $n=3$, on a $u_0^{(3)} = 7$, $u_1^{(3)} = 3$, $u_2^{(3)} = 1$, $u_3^{(3)} = 1$.
Si $u_0^{(n)}$ est le nombre de nombres négatifs au début de C_n, ce sont donc les nombres $\{-1, \cdots - u_1^{(n)}\}$, dans C_{n+1}, on va retrouver les nombres compris entre -2 et $-3u_1^{(n)} - 1$, auquels il faut ajouter -1 fourni par la

règle 2 ci-dessus, la règle de récurrence est donc : $u_0^{(n+1)} = 3u_0^{(n)} + 1$, ce qui permet de calculer directement $u_0^{(n)} = \dfrac{5.3^{n-2} - 1}{2}$.

Pour les autres suites on a les relations de récurrences suivantes pour $1 \leq i \leq 2n-3$: $u_i^{(n+1)} = 3u_i^{(n)}$.

Et les règle 3 et 4 ci-dessus permettent de calculer $u_{2(n+1)-4}^{(n+1)} = 1$ et $u_{2(n+1)-3}^{(n+1)} = 1$

D'où le résultat final :

$$\begin{cases} u_0^{(n)} = \dfrac{5.3^{n-2} - 1}{2} \\ u_1^{(n)} = 3^{n-2} \\ \displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n-2} \left((u_{2i}^{(n)} = 3^{n-2-i}) \wedge (u_{2i+1}^{(n)} = 3^{n-2-i}) \right) \end{cases}$$

Ces relations permettent de calculer directement C_4 (par exemple) :
$u_0^{(4)} = 22$; $u_1^{(4)} = 9$; $u_2^{(4)} = 3$; $u_3^{(4)} = 3$; $u_4^{(4)} = 1$; $u_5^{(4)} = 1$

$$\begin{aligned} C_4 = \{ \quad & -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12, -13, -14, -15, -16, -17, -18, -19, -20, -21, -22, \\ & 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, \\ & -32, -33, -34, \\ & 35, 36, 37, \\ & -38, \\ & 39\} \end{aligned}$$

Et enfin de préparer les pesées en décodant chacun des éléments de C_4 :

-1	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$
-2	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$
-3	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{E}$
-4	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$
-5	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$
-6	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$
-7	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{G}$
-8	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{D}$
-9	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$
-10	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$
-11	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$
-12	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{E}$
-13	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$

-14	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$
-15	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$
-16	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{G}$
-17	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{D}$
-18	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$
-19	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$
-20	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$
-21	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{E}$
-22	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$
23	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$
24	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{E}$
25	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$
26	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$

27	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$
28	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{D}$
29	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{G}$
30	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$
31	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$
-32	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$
-33	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$
-34	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{G}$
35	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{G}$
36	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$
37	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{D}$
-38	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D}$
39	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$

A titre d'exemple : -21 = (-1)*27 + (1)*9 + (-1)*3 + (0)*1 = $\mathcal{GDGE}$

Et donc les pesées :

14 15 16 17 18 19 20 21 22 32 33 34 38 ↑ 23 24 25 26 27 28 29 30 31 35 36 37 39

5 6 7 8 9 10 11 12 13 32 33 34 38 ↑ 14 15 16 17 18 19 20 21 22 35 36 37 39

2 3 4 11 12 13 20 21 22 23 24 25 38 ↑ 5 6 7 14 15 16 29 30 31 32 33 34 39

1 4 7 10 13 16 19 22 23 26 29 34 35 ↑ 2 5 8 11 14 17 20 25 28 31 32 37 38