Proofs

$$f(x) = y = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6bx + 2c$$

$$f'''(x) = 24x + 6b$$

$$f''''(x) = 24$$

$$\Delta y = y - y_0$$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\cancel{\Delta y = \Delta x \left[\Delta x^3 + \frac{f''''(x_0)}{24} \Delta x^2 + \frac{f'''(x_0)}{12} \Delta x + \right.}$$

$$\Delta y = \Delta x \left[\frac{f''''(x_0)}{24} \Delta x^3 + \frac{f'''(x_0)}{6} \Delta x^2 + \frac{f''(x_0)}{2} \Delta x + f'(x) \right]$$

$$\cancel{= \Delta x \left[\Delta x^3 + \left(x^2 + \frac{b}{2} x + \frac{c}{6} \right) \Delta x^2 \right.}$$

$$\cancel{+ \left(\right.}$$

$$= \Delta x \left[\Delta x^3 + \left(x_0 + b \right) \Delta x^2 + \left(x_0^2 + 3bx_0 + c \right) \Delta x + \left(4x_0^2 + 3bx_0^2 + 2cx_0 + d \right) \right]$$

$$= \Delta x \left[\Delta x^3 + \frac{u}{4} \Delta x^2 + \frac{u^2}{6} \Delta x + \frac{u^3}{4} \right]$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4} u = 2x_0 + \frac{b}{2} \\ \frac{1}{6} u = 2x_0^2 + bx_0 + \frac{c}{3} \\ \frac{1}{4} u^3 = 2x_0^2 + \frac{3}{2} bx_0^2 + cx_0 + \frac{d}{2} \end{cases}$$

$$\cancel{\Delta y = \Delta x \Big[\Delta x^3 + \left(2x_0 + \frac{b}{2}\right)\Delta x^2 + \left(2x_0^2 + bx_0 + \frac{c}{3}\right)\Delta x + (2x_0^2}$$

$$\Delta y = \Delta x \Big[\Delta x^3 + (2x_0 + b)\Delta x^2 + (6x_0^2 + 3bx_0 + c)\Delta x + (4x_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 + d) \Big]$$

or, $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

On conjecture que: $\Delta x = \dfrac{\Delta y}{k}\dfrac{m}{(2x_0+b)}$

d'où

$$\Delta y = \Delta x^4 + (2x_0+b)\Delta x^3 + (6x_0^2+3bx_0+c)\Delta x^2 + (4x_0^3+3bx_0^2+2cx_0+d)\Delta x$$

$$= \left(\frac{\Delta y\, m}{k(2x_0+b)}\right)^4 + (2x_0+b)\left(\frac{\Delta y\, m}{k(2x_0+b)}\right)^3 + (6x_0^2+3bx_0+c)\left(\frac{\Delta y\, m}{k(2x_0+b)}\right)^2 + (4x_0^3+3bx_0^2+2cx_0+d)\left(\frac{\Delta y\, m}{k(2x_0+b)}\right)$$

$$\frac{2x_0+b}{(2x_0+b)^3} = \frac{1}{(2x_0+b)^2}$$

ERREUR : manque ^{2}

$$\Delta y = \left(\frac{\Delta y\, m}{k(2x_0+b)}\right)^4 + \frac{1}{(2x_0+b)^{2}}\left(\frac{\Delta y\, m}{k}\right)^3$$
$$+ \left(6x_0^2+3bx_0+c\right)\left(\frac{\Delta y\, m}{k(2x_0+b)}\right)^2$$
$$+ \left(4x_0^3+3bx_0^2+2cx_0+d\right)\left(\frac{\Delta y\, m}{k(2x_0+b)}\right)$$

$$k^4\Delta y = \left(\frac{\Delta y\, m}{2x_0+b}\right)^4 + \frac{1}{(2x_0+b)^2}\left(\Delta y\, m\right)^3 k$$

Erreur

$$+ \frac{\left(6x_0^2+3bx_0+c\right)}{(2x_0+b)^2}\left(\Delta y\, m\right)^2 k$$
$$+ \frac{\left(4x_0^3+3bx_0^2+2cx_0+d\right)}{(2x_0+b)}\left(\Delta y\, m\right)$$

$$k^4 = \Delta y^3\left(\frac{m}{2x_0+b}\right)^4 + \frac{1}{2x_0+b}\Delta y^2 m^3 k$$
$$+ \frac{6x_0^2+3bx_0+c}{(2x_0+b)^2}\Delta y\, m^2 k^2$$
$$+ \frac{4x_0^3+3bx_0^2+2cx_0+d}{(2x_0+b)} m k^3 =$$

$$k^4 - \left(\frac{4x_0^3+3bx_0^2+2cx_0+d}{2x_0+b}\right)\Delta y\, m k^3$$
$$- \frac{6x_0^2+3bx_0+c}{(2x_0+b)^2}\Delta y\, m^2 k^2 - \frac{1}{2x_0+b}\Delta y^2 m^3 k - \Delta y^3\left(\frac{m}{2x_0+b}\right)^4$$

Or

$$(x-v)^4 = x^4 - 4x^3 v + 6x^2 v^2 + 4x^2 v^3 - v^4$$

Par identification

$$-4v = -\frac{4x_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 + d}{2x_0+b} \cancel{\Delta y}\, m$$

$$6v^2 = -\frac{6x_0^2 + 3bx_0 + c}{(2x_0+b)^2} \Delta y\, m^2$$

$$-4v^3 = -\frac{1}{2x_0+b} \Delta y^2\, m^3$$

Or $\quad v \cdot v^2 = v^3$

$$\left(\frac{4x_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 + d}{4(2x_0+b)} \cancel{\Delta y}\, m\right)\left(-\frac{6x_0^2 + 3bx_0 + c}{6(2x_0+b)^2} \Delta y\, m^2\right)$$

$$= \frac{1}{4(2x_0+b)} \Delta y^2\, m^3$$

les m^3 s'annulent, Δy et Δy^2 donnent Δy, $(2x_0+b)$ et $(2x_0+b)^3$ donnent $(2x_0+b)^2$. Il reste

$$-\frac{(4x_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 + d)(6x_0^2 + bx_0 + c)}{6(2x_0+b)^2} = \Delta y$$

$$-\frac{\left(4x_0^3+3bx_0^2+2cx_0+d\right)\left([illegible]\,x_0 \; 1018\right)}{6\left(2x_0+b\right)^2} = \Delta y$$

[illegible]

$$-\frac{(4x_0^3+3bx_0^2+2cx_0+d)(6x_0^2+bx_0+c)}{6(2x_0+b)^2} = y - x_0^4 - bx_0^3 - cx_0^2 - dx_0 - e$$

on pourra remarquer de ~~les~~ la terme d'ordre 4 s'annule et peut donner une équation de degré 3 à répondre, ce qui est possible car l'on connait la résolution du polynôme d'ordre 3.

Ensuite on aura à démontrer que :

$$V = \frac{4x_0^3+3bx_0^2+2cx_0+d}{4(2x_0+b)} m$$

et
$$V^2 = -\frac{6x_0^2+3bx_0+c}{6(2x_0+b)^2} \Delta y \; m^2$$

$$\left(\frac{4x_0^3+3bx_0^2+2cx_0+d}{4(2x_0+b)^2} m\right)^2 = -\frac{6x_0^2+3bx_0+c}{6(2x_0+b)^2} \Delta y \; m^2$$

soit
$$(4x_0^3+3bx_0^2+2cx_0+d)^2 = -\frac{16(6x_0^2+3bx_0+c)(y-y_0)}{6}$$

$$(4x_0^3+3bx_0^2+2cx_0+d)^2 = +\frac{16(6x_0^2+3bx_0+c)}{6} \frac{(4x_0^3+3bx_0^2+2cx_0+d)(6x_0^2+3bx_0+c)}{6(2x_0+b)^2}$$

$$4x_0^3+3bx_0^2+2cx_0+d = \frac{16}{36}\frac{(6x_0^2+3bx_0+c)^2}{(2x_0+b)^2}$$

alors il y a une unique solution

$\Rightarrow$ il ~~n'y aura pas de solution à par $x_0=0$~~ si ce sera une équation d'ordre 1 ~~si $x_0 \neq 0$~~