2. Valeurs propres :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

① Il faut dans un premier temps, trouver les solutions qui satisfont l'équation polynômiale (fonction de lambda (λ)) :

$\boxed{\det(A) = \alpha^2 - \alpha \neq 0}$

$$|A - \lambda ID| = 0$$

Il faudra vérifier que $\det(A) \neq 0$ ~~sinon~~ n'est pas inversible.

② => Il faudra ensuite trouver les vecteurs propres

③ Enfin, nous vérifierons les résultats, Nous diagonaliserons par matrice de passage.

① $|A - \lambda Id| = 0 \iff \det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$$(\alpha-\lambda)\left[(\alpha-\lambda)^2 - 0\right] - 0 \times 0 + 1(0 \times 0 - 1(\alpha-\lambda)) = 0$$

$$\boxed{(\alpha-\lambda)(\alpha^2 - 2\alpha\lambda + \lambda^2) + (\lambda-\alpha) = 0} \quad (1)$$

$$\alpha^3 - 2\alpha^2\lambda + \lambda^2\alpha - \lambda\alpha^2 + 2\alpha\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda - \alpha = 0$$

On factorise par λ :

$$-\lambda^3 + \lambda^2(\alpha + 2\alpha) + \lambda(-2\alpha^2 - \alpha^2 + 1) + (\alpha^3 - \alpha) = 0$$

$$-\lambda^3 + 3\alpha\lambda^2 + (-3\alpha^2 + 1)\lambda + (\alpha^3 - \alpha) = 0$$

Mauvaise méthode : On reprend l'équation (1) :

$$(\alpha-\lambda)(\alpha^2 - 2\alpha\lambda + \lambda^2) + (\lambda-\alpha) = 0$$

$$(\alpha-\lambda)\left[(\alpha^2 - 2\alpha\lambda + \lambda^2) - 1\right] = 0$$

$$(\alpha-\lambda)(\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 - 1) = 0$$

On a $(\alpha - \lambda) = 0$ $\quad \lambda_1 = \alpha$

et $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 - 1 = 0$ $\quad$ Polynôme du 2nd degré :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\alpha)^2 - 4 \times 1 \times (\alpha^2 - 1)$

$= 4\alpha^2 - 4\alpha^2 + 4$

$= 4 > 0$ $\quad$ donc 2 solutions

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2\alpha) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{2\alpha - 2}{2} = \alpha - 1$$

$$\lambda_3 = \frac{-(2\alpha) + \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{2\alpha + 2}{2} = \alpha + 1$$

Donc :

$\lambda_1 = \alpha$

$\lambda_2 = \alpha - 1$

$\lambda_3 = \alpha + 1$

λ_1 :

$(A - \lambda_1 Id)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} (\alpha - \alpha) & 0 & 1 \\ 0 & (\alpha - \alpha) & 0 \\ 1 & 0 & \alpha - \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Il n'y a pas de x_2 dans ce vecteur propre

x_2 est quelconque.

$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

λ_2 :

$(A - \lambda_2 Id)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $(\alpha - (\alpha - 1) = \alpha - \alpha - 1 = -1)$

$$\begin{pmatrix} \alpha-(\alpha-1) & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-(\alpha-1) & 0 \\ 1 & 0 & \alpha-(\alpha-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -x_1 \text{ ou } x_1 = -x_3 \end{cases}$$

$X_2 = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$

avec $m = 2$ $\quad X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 =$

$$\begin{pmatrix} \alpha-(\alpha+1) & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-(\alpha+1) & 0 \\ 1 & 0 & \alpha-(\alpha+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_3$$

$$m = 3 \Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det(P) = 0$

$\Rightarrow$ Non inversible

IMPOSSIBLE ?