Pour n dans $\mathbb{N}$, on note u_n le réel $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}$. On a ainsi défini une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Logarithme de 2

1. Ecrire les cinq premières valeurs de cette suite, présentées dans un tableau.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$$
3. En intégrant de 0 à 1 des fonctions dont on vérifiera qu'elles sont continues, montrer alors que
$$\ln(2) - \int_{x=0}^{x=1} \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \mathrm{dx} = \mathrm{u_n}$$
4. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \int_{x=0}^{x=1} \frac{x^{n+1}}{1+x} \mathrm{dx} \leqslant \frac{1}{\mathrm{n}+2}$$
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est $\ln(2)$.
6. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} < \ln(2) < u_{2n}$$
7. Montrer que la valeur approchée par défaut à un centième près le $\ln(2)$ est $0,69$.