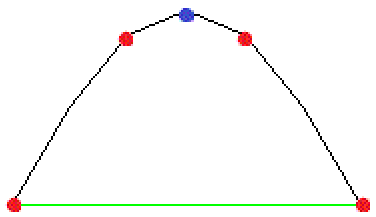
Interpolation temporelle

Calcul d'un échantillon intermédiaire :

L'idée est de calculer l'échantillon bleu à partir des échantillons voisins, au moment de la restitution.



En prenant un nouvel échantillon et en écrasant le plus ancien, on peut déterminer l'échantillon intermédiaire suivant.
Ainsi la fréquence des échantillons pourra être doublée, en temps réel et sans régime transitoire!

Avec deux interpolations successives, le nombre d'échantillons pourra être quadruplé.

La dernière interpolation se fera à partir de point resserrés, donc elle pourra être de type polynomial.

Approche intuitive :

L'échantillon que l'on veut calculer est : $Yo = A\cos\varphi$

Les deux échantillons les plus proches sont distants de $\pm\theta$.
Donc l'angle entre deux échantillons mesurés est 2θ, et les échantillons extrêmes sont distants de $\pm 3\theta$

A1 représente la somme des deux échantillons distants de $\pm\theta$.
A3 représente la somme des deux échantillons distants de $\pm 3\theta$.

$$A1=(Y-1)+(Y+1)= A[\cos(\varphi - \theta)+ \cos(\varphi + \theta)]= 2A\cos\varphi.\cos\theta$$
$$A3=(Y-3)+(Y+3)= A[\cos(\varphi - 3\theta)+ \cos(\varphi + 3\theta)]= 2A\cos\varphi.\cos(3\theta)$$

A3/A1 représente la convexité de la courbe :

$$a= 1-(A3/A1)= 1-[\cos(3\theta)/\cos\theta]= [\cos\theta - \cos(3\theta)]/\cos\theta$$
$$a= [\cos(2\theta-\theta)-\cos(2\theta+\theta)]/\cos\theta = [2\sin(2\theta).\sin\theta]/\cos\theta = 2x2\sin\theta.\cos\theta.\sin\theta/\cos\theta$$
$a= 4\sin^2\theta$ avec le nombre d'échantillons par période valant $Fech/F = \pi/\theta$

Yo se calcule donc à partir des échantillons voisins et de la convexité :

$Yo= A1xf(a)/2 = A\cos\varphi.\cos\theta.f(a)= A\cos\varphi$ donc $\cos\theta.f(a)= 1$.
Donc f est définie par $f(4\sin^2\theta)=1/\cos\theta$ et devient infinie pour $\theta = \pi/2$ $(Fech = 2F)$

Comme $a=4\sin^2\theta$ alors $4\cos^2\theta = 4-a$ donc $2\cos\theta = \sqrt{(4-a)}$ donc $f(a)=2/\sqrt{(4-a)}$

$Yo = A1/\sqrt{[4-(1-(A3/A1))]}$ donc $Yo = A1/\sqrt{[3+(A3/A1)]}$

Approche mathématique :

$A1 = 2Yo.\cos\theta$
$A3 = 2Yo.\cos 3\theta$

$3A1 + A3 = 2Yo.[3\cos\theta + \cos 3\theta] = 2Yo \times 4\cos^3\theta = 8Yo.\cos^3\theta$

Par ailleurs : $A1^3 = 8Yo^3.\cos^3\theta$

Donc $Yo^2(3A1 + A3) = A1^3$, ce qui donne le même résultat ou un résultat opposé.

Domaine de définition :

Yo n'est pas défini pour :

- $A1 = 0$
- $A3 = -3A1$

Pour contourner le 1er problème : `Si A1 tend vers 0 alors Yo = A1/2.`

Le second se traduit par $3\cos\theta + \cos 3\theta = 0$ donc $4\cos^3\theta = 0$ donc $\theta = \pi/2$ (Shannon).

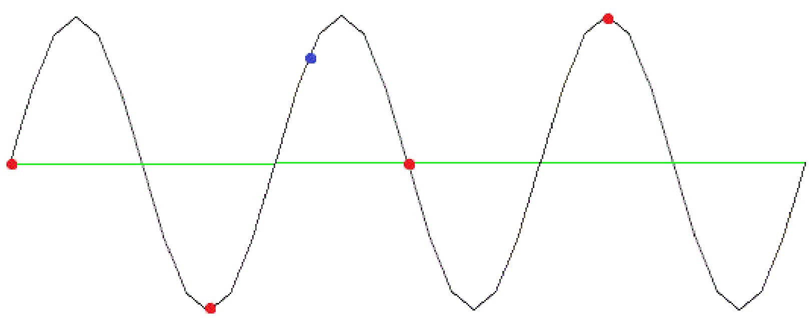
Exemple (A=1 et φ = 0) :

θ	A1	A3	3 + A3/A1
0	2	2	4
30	1,73	0	3
45	1,41	-1,41	2
60	1	-2	1

Ce qui donne Yo = 1.

Contournement du théorème de Shannon

Si on sait que le nombre d'échantillons par période est compris entre 1 et 2 exclus, il existe bien un et un seul sinus passant par ces échantillons. Exemple avec 4 échantillons pour 3 périodes ($\theta = 135°$) :



$A1 = -1$
$A3 = 1$

Cette fois ci, $Yo = -A_1/\sqrt{[3+(A_3/A_1)]}$

Ce qui donne ici $Yo = 1/\sqrt{2} = \cos 45°$

Cas d'un signal non sinusoïdal

Le signal n'étant pas sinusoïdal, les échantillons calculés sont inexacts.
Une infinité de courbes peut passer par 4 points. Le fait d'en prendre 6 limite les possibilités...

Calcul avec 6 échantillons

Dans un premier temps, il s'agit de trouver une relation entre $\cos\theta$, $\cos 3\theta$ et $\cos 5\theta$:
$\cos 5\theta + \cos\theta = 2(\cos 3\theta)(\cos 2\theta) = 2(\cos 3\theta)(2\cos^2\theta - 1) = (\cos 3\theta)(4\cos^2\theta - 2)$

En multipliant par $\cos\theta$:
$\cos\theta\,(\cos 5\theta + \cos\theta)$
$= (\cos 3\theta)(4\cos^3\theta - 2\cos\theta)$
$= (\cos 3\theta)[(3\cos\theta + \cos 3\theta) - 2\cos\theta]$
$= (\cos 3\theta)(\cos\theta + \cos 3\theta)$

Donc dans le cas d'un sinus pur :
$A_1(A_1+A_5) = A_3(A_1+A_3)$
$r = A_3(A_1+A_3)/[A_1(A_1+A_5)] = 1$

Le rapport r quantifie la « pureté » du signal et il servira au facteur de correction.

On peut étudier le cas d'un son très aigu mélangé à un son très grave de même amplitude.
Localement, le signal suivant répond à cette exigence : $y(n) = 1 + \cos(n\theta+\varphi)$ avec $\theta = 60°$

$u = A_1/\sqrt{[3+(A_3/A_1)]}$

Pour $\varphi = 0$, $A_3 = 0$ donc $r = 0$, alors que Y_o est non nul.

Il faut donc trouver une fonction $g(r)$ telle que $Y_o = g(r).u$.

Un sinus pur n'a pas besoin de correction donc par définition $g(1) = 1$.

Pour $\varphi = 0$, $A_1 = 3$ donc $u = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$, alors que $Y_o = 2$, donc $g(0) = 2/\sqrt{3}$.

Pour $\varphi = 180°$:

$y(0) = 0$
$y(\pm1) = 0{,}5$ donc $A_1 = 1$
$y(\pm3) = 2$ donc $A_3 = 4$
$y(\pm5) = 0{,}5$ donc $A_5 = 1$

$u = 1/\sqrt{[3+(4/1)]} = 0{,}378$
$r = 4(1+4)/[1(1+1)] = 20/2 = 10$

$Y_o = 0$ donc $g(10) = 0$

Un calcul par pas de 10° sur un tableur semble montrer que la fonction g existe et qu'elle est monotone.

Nous cherchons le trinôme $g(r) = ar^2 + br + 2/\sqrt{3}$ passant par les 3 points d'abscisse 0, 1 et 10.

$g(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1 - 2/\sqrt{3}$
$g(10) = 0 \Rightarrow 100a + 10b = -2/\sqrt{3}$

La résolution du système donne $g(r) = 0{,}00389r^2 - 0{,}15389r + 1{,}15$

Le signal $-1 + \cos(n\theta+\varphi)$ donne les mêmes résultats.
La difficulté est de trouver les bons signaux pour trouver une fonction g sur l'ensemble $\Re$.

D'autres signaux donnent des résultats un peu contradictoires, mais les erreurs pourraient se compenser au niveau du post-filtrage...

<u>Développement en série de Fourier</u>

Un signal quelconque est une somme de sinus : $Yo = \sum A_{1i}/\sqrt{[3+(A_{3i}/A_{1i})]}$

Un échantillonnage peu gourmand en mémoire n'est pas loin des 60°.
La valeur dans la racine est alors proche de 1, ce qui permet de faire un développement limité :

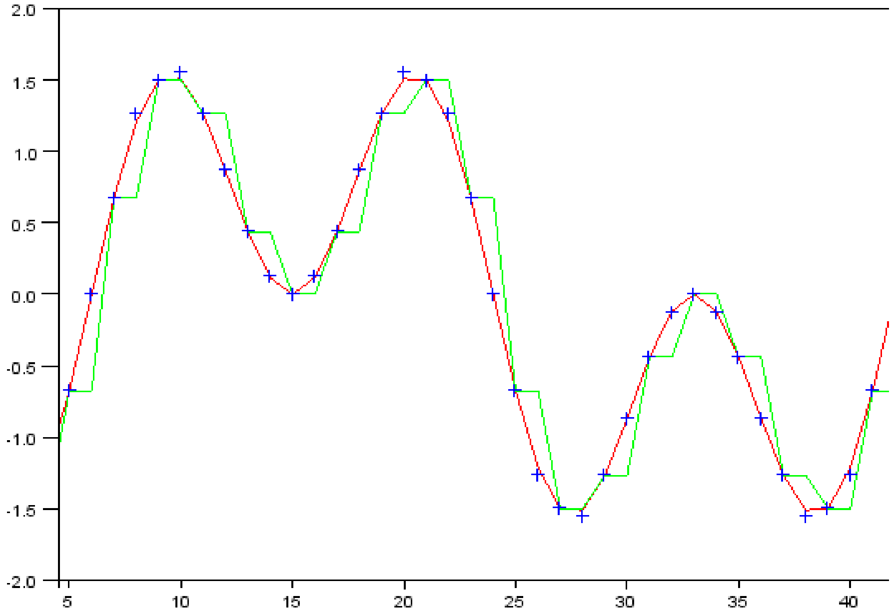
$$Yo \approx \sum A_{1i} \{1 - ½ [2+(A_{3i}/A_{1i})] + ⅜[2+(A_{3i}/A_{1i})]^2\} = \sum A_{1i} - ½ [2A_{1i} + A_{3i}] + ⅜A_{1i} [2+(A_{3i}/A_{1i})]^2$$
$$= \sum - ½ A_{3i} + ⅜A_{1i} [4 + 4(A_{3i}/A_{1i}) + (A_{3i}/A_{1i})^2] = \sum - ½ A_{3i} + ⅜ [4A_{1i} + 4A_{3i} + (A_{3i}^2 /A_{1i})]$$
$$= \sum - ½ A_{3i} + 1{,}5A_{1i} + 1{,}5A_{3i} + ⅜(A_{3i}^2 /A_{1i}) = \sum A_{3i} + 1{,}5A_{1i} + ⅜(A_{3i}^2 /A_{1i})$$

<u>Simulations sous scilab</u>

Il s'agit de calculer les échantillons intermédiaires d'un signal pur et de son harmonique 3 :
$\sin \omega t + \sin 3\omega t$

```
x = [-5:40]
v = sind(10*x) + sind(30*x)
for i=1:23
        x(2*i) = x(2*i-1)
end,
y = sind(10*x) + sind(30*x)
plot (y,'g')
plot(v,'r')
z=y
for i=1:18
        a = y(2*i+3) + y(2*i+5)
        b = y(2*i+2) + y(2*i+7)
        c = y(2*i) + y(2*i+9)
        if a==0 then u=0;
        else u = a/sqrt(3+b/a)
        end,
        d=a*(a+c)
        if d<=0 then r=5;
        else r = b*(a+b)/d
        end,
        z(2*i+4) = u*(0.00389*r*r-0.15389*r+1.15)
end
plot (z,'+')
```

En rouge, la courbe reliant les échantillons réels. En vert, les échantillons disponibles.
En bleu, les échantillons calculés...



Ici les valeurs en dehors de l'intervalle de définition de g(r) sont fixées arbitrairement.

Ci après, des valeurs de la fonction g avec sin 3ωt + sin 5ωt :

```
t=[0:59]
y=sind(30*t)+sind(50*t)
for i=6:55
a=y(i-1)+y(i+1)
b=y(i-3)+y(i+3)
c=y(i-5)+y(i+5)
d=a*(a+c)
if a<>0 & d<>0
r = b*(a+b)/d
g = y(i)*sqrt(3+b/a)/a
plot (r,g,'.')
end,
end
```