Université de Lille — Faculté des Sciences et Technologies — Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques- Semestre 5 — 2020-2021

M53 - Intégrales à paramètres et séries de Fourier

Devoir surveillé 1

19 janvier 2021

Durée : 3 heures

Exercice 1.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xu)}{1+u^2}\, du,$$

et pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(t)}{x^2+t^2}\, dt.$$

a) Montrer que G est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

c) En utilisant le changement de variable $t = xu$, montrer que pour tout $x > 0$, on a $F(x) = G(x)$.

d) En déduire que F est bornée sur $]0, +\infty[$ et que F se prolonge par continuité en 0 en posant $F(0) = \pi$.

e) Montrer que F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.
Indication : on pourra remarquer que si $f(x,t) = \frac{x\cos(t)}{x^2+t^2}$, *alors* $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{x^2+t^2}$.

f) Vérifier que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right).$$

g) En déduire que F est sur $]0, +\infty[$ une solution de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y''(x) - y(x) = 0.$$

h) On **admettra** que les solutions de l'équation différentielle (E) sont données par $y(x) = k_1e^x + k_2e^{-x}$, où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. En utilisant d) et g), en déduire l'expression de $F(x)$.

Exercice 2.

On considère la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t), & \text{si } t \in [0, \pi[, \\ 0, & \text{si } t \in [-\pi, 0[. \end{cases}$$

a) Tracer l'allure de la courbe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$, et préciser le domaine de continuité de f.

T.S.V.P.

b) Calculer les coefficients de Fourier de f. *Indication : on pourra utiliser (sans justification) les formules*

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b)) \quad \textit{et} \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b)).$$

c) Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nt)}{1-4n^2}.$$

d) En déduire que

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}.$$

e) Calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$