On cherche les u0 pour lesquels la suite n'a qu'un nombre fini de termes, c'est-à-dire les u0 tels qu'il existe un entier n avec :

$f^n(u_0) = 3$

Appelons x_n un tel nombre u0 qui vérifie cette condition.

Inversons la fonction f :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x-2}{x-3} \Leftrightarrow y(x-3) = x-2 \Leftrightarrow x(y-1) = 3y-2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3y-2}{y-1}$$

Avec comme condition $y \neq 1$

On pose i fonction réciproque de f : $i(y) = f^{-1}(y) = \frac{3y-2}{y-1}$

On a ainsi : $f^n(x_n) = 3 \Leftrightarrow x_n = i^n(3)$

Calculons les premiers éléments de la suite (xn) :

$$x_1 = \frac{3\times 3-2}{3-1} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$$x_2 = \frac{3\times\frac{7}{2}-2}{\frac{7}{2}-1} = \frac{17}{5} = 3{,}4$$

$$x_3 = \frac{3\times\frac{17}{5}-2}{\frac{17}{5}-1} = \frac{41}{12} \approx 3{,}4166$$

$$x_4 = \frac{99}{29} \approx 3{,}413793 \qquad x_5 = \frac{239}{70} \approx 3.414285 \quad x_6 = \frac{577}{169} \approx 3.414201$$

On a des fractions qui tendent apparemment vers $2+\sqrt{2} \approx 3{,}414213$

Ce qui n'est pas étonnant, puisque, si x_n tend vers une limite l alors cette limite vérifie : $i(l) = l$

Ce qui donne :

$$i(l) = l \Leftrightarrow \frac{3l-2}{l-1} \Leftrightarrow l^2 - 4l + 2 = 0$$

de solutions : $l = 2-\sqrt{2} \quad ou \quad l = 2+\sqrt{2}$

On conjecture que les xn sont les fractions réduites du développement en fraction continue de $2+\sqrt{2}$

Le développement en fraction continue de $2+\sqrt{2}$ se déduit de celui de $\sqrt{2}$

On a : $\sqrt{2} = [1,2,2,2,\ldots]$

D'où $2+\sqrt{2} = [3,2,2,2,\ldots]$

C'est-à-dire :

$$2+\sqrt{2} = 3 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ldots.}}}}$$

En calculant les premières fractions réduites d'ordre n on remarque que l'on obtient les éléments de (xn) déjà calculés.

Reste à le démontrer pour tout n. Soit fc(n) la fraction réduite d'indice n de $2+\sqrt{2}$

Cherchons à exprimer fc(n+1) en fonction de fc(n)

$$fc(n+1) = 3 + \cfrac{1}{(n+1)\ \text{étapes}\begin{cases} 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{2}}} \end{cases}} = 3 + \cfrac{1}{-1 + 3 + \cfrac{1}{n\ \text{étapes}\begin{cases} 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{2}}} \end{cases}}}$$

On a donc :

$$fc(n+1) = 3 + \frac{1}{-1 + fc(n)}$$

Et ainsi :

$$fc(n+1) = \frac{3fc(n) - 2}{fc(n) - 1}$$

Ce qui signifie :

$$fc(n+1) = i\big(fc(n)\big)$$

Par récurrence on démontre que les xn sont bien les fractions réduites fc(n) de $2 + \sqrt{2}$
En effet $x_0 = 3$ est la fraction réduite d'ordre 0 (initialisation).
Et comme $x_{n+1} = i(x_n)$ on en déduit que, si x_n est la fraction réduite d'indice n, alors x_{n+1} est celle d'indice n+1 (hérédité).

En outre on a ainsi démontré que (x_n) admet bien une limite, et que cette limite est $2 + \sqrt{2}$