Retour sur l'étude de (un) :

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{u_n - 3}$$

Rappel : on a défini la fonction f associée à cette suite par $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$
D'abord si (u_n) converge, c'est vers un réel l_u tel que : $f(l_u) = l_u$
C'est-à-dire : $l_u = \frac{l_u-2}{l_u-3} \iff l_u^2 - 3l_u = l_u - 2 \iff l_u^2 - 4l_u + 2 = 0$

$$\iff l_u = 2 - \sqrt{2} \quad ou \quad l_u = 2 + \sqrt{2}$$

En faisant une représentation graphique on conjecture que :
a) Si $u_0 = 2 + \sqrt{2}$ alors la suite (u_n) est constante égale à $2 + \sqrt{2}$
b) S'il existe un entier n_0 tel que $u_0 = x_{n_0}$ alors la suite (u_n) n'a qu'un nombre fini de termes et ce nombre de termes est $(n_0 + 1)$.
c) Pour tout autre u_0 la suite (u_n) tend vers $2 - \sqrt{2}$

<u>Démontrons le point (c)</u> :
On commence par définir une nouvelle suite (v_n) par : $v_n = u_n - (2 - \sqrt{2})$ (pour tout n)
Le but est de montrer que (v_n) admet zéro pour limite.
Déjà comme $u_0 \neq 2 + \sqrt{2}$, alors $v_0 \neq 2\sqrt{2}$ (dans le cas (c)).
Exprimons v_{n+1}en fonction de v_n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 + \sqrt{2}$$

Par substitution on obtient :

$$v_{n+1} = \frac{u_n - 2}{u_n - 3} - 2 + \sqrt{2} = \frac{v_n + 2 - \sqrt{2} - 2}{v_n + 2 - \sqrt{2} - 3} - 2 + \sqrt{2}$$

$$= \frac{v_n - \sqrt{2}}{v_n - 1 - \sqrt{2}} + \frac{(v_n - 1 - \sqrt{2})(-2 + \sqrt{2})}{v_n - 1 - \sqrt{2}} = \frac{(-1 + \sqrt{2})v_n}{v_n - 1 - \sqrt{2}}$$

Finalement :

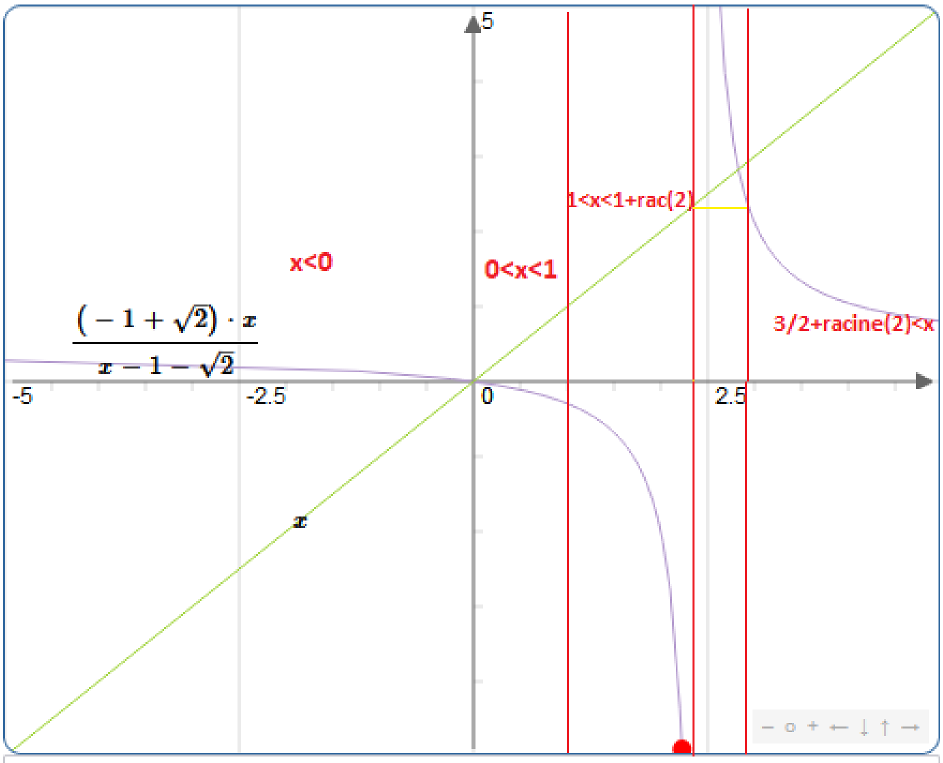
$$v_{n+1} = \frac{(-1 + \sqrt{2})v_n}{v_n - 1 - \sqrt{2}}$$

Soit h la fonction associée à (v_n) : $h(x) = \frac{(-1+\sqrt{2})x}{x-1-\sqrt{2}}$
Voici le tableau de variation de h :

x	$-\infty$		0		$1+\sqrt{2}$			$+\infty$
h(x)	$-1+\sqrt{2}$	↘	0	↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-1+\sqrt{2}$

On étudie l'évolution de v_n selon son appartenance aux différents intervalles représentés sur le graphique ci-après.

Dans notre cas on suppose que, pour tout n on a $v_n \neq 1+\sqrt{2}$, ce qui correspond, comme vu précédemment, à, pour tout n, $u_n \neq 3$. Autrement dit , on ne considère que les cas où v_0 n'est pas dans l'ensemble $\{x_n - 2 + \sqrt{2}, n \in \boldsymbol{N}\}$.
Ainsi v_n est défini pour tout n, et la suite a un nombre infini de termes.



- Cas 1 : Sur $]-\infty, \mathbf{1}]$ on veut démontrer que l'application h est **contractante**, et que cet intervalle est stable par h

- Si $\boldsymbol{v_n} \leq \mathbf{0}$ on a $v_n - 1 - \sqrt{2} \leq -1 - \sqrt{2}$ et $\left|\frac{1}{v_n - 1 - \sqrt{2}}\right| \leq \frac{1}{1+\sqrt{2}}$
D'où

$$|v_{n+1}| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}}|v_n|$$

Soit :

$$|v_{n+1}| \leq (3-2\sqrt{2})|v_n|$$

et $v_{n+1} \leq -1+\sqrt{2}$ donc en particulier $v_{n+1} \leq 1$ (stabilité de l'intervalle)

- Si $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{v_n} \leq \mathbf{1}$ alors $-1-\sqrt{2} \leq v_n - 1 - \sqrt{2} \leq -\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} \leq |v_n - 1 - \sqrt{2}| \leq 1 + \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} \leq \left|\frac{1}{v_n - 1 - \sqrt{2}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left|\frac{v_n}{v_n - 1 - \sqrt{2}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|v_n|$$

Ainsi

$$|v_{n+1}| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}|v_n|$$

$$|v_{n+1}| \leq \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)|v_n|$$

Et $v_{n+1} \leq 0$ (stabilité de l'intervalle)

Donc sur $]-\infty, 1]$ on a, d'une part, stabilité de l'intervalle par h, et :

$$|v_{n+1}| \leq Max\left(3 - 2\sqrt{2} \quad , \quad 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)|v_n|$$

Soit :

$$|v_{n+1}| \leq \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) |v_n|$$

L'application h est contractante sur l'intervalle, donc, si $v_0 \leq 1$ la suite (v_n) tend vers 0.

- Cas 2 : Si $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{v_n} < \mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{2}}$

On a : $-\sqrt{2} \leq v_n - 1 - \sqrt{2} \leq 0$ donc :

$$\frac{1}{v_n - 1 - \sqrt{2}} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Et :

$$0 \leq \sqrt{2} - 1 \leq (-1 + \sqrt{2})v_n \leq 1$$

D'où

$$\frac{(-1+\sqrt{2})v_n}{v_n - 1 - \sqrt{2}} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ainsi $v_{n+1} < 0$ et on retombe sur le cas (1) , la suite tend vers 0.

- Si $\boldsymbol{v_n} > \mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{2}}$

D'abord cherchons v_n tel que $v_n > 1 + \sqrt{2}$ et $v_{n+1} < 1 + \sqrt{2}$, ce qui signifie :

$$\frac{(-1+\sqrt{2})v_n}{v_n - 1 - \sqrt{2}} < 1 + \sqrt{2}$$

comme on a $v_n - 1 - \sqrt{2} > 0$ on peut écrire :

$$(-1+\sqrt{2})v_n < (1+\sqrt{2})(v_n - 1 - \sqrt{2})$$

$$(1+\sqrt{2})^2 < 2v_n$$

$$v_n > \frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

Cas 3 : Ainsi **s'il existe n tel que** $\boldsymbol{v_n > \frac{3}{2} + \sqrt{2}}$ alors $v_{n+1} < 1 + \sqrt{2}$, on retombe sur le cas (1) ou (2), et la suite tend vers 0

Pour la suite on pose $b_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$

Il reste à traiter le cas :

- Cas 4 : Si $\boldsymbol{1 + \sqrt{2} < v_n < \frac{3}{2} + \sqrt{2}}$

Remarque : v_n ne peut être égal à $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ car cela correspond à $x_1 - 2 + \sqrt{2} = \frac{7}{2} - 2 + \sqrt{2}$ (traité dans le point (b)).

On a déjà $v_{n+1} \geq 1 + \sqrt{2}$ (démontré au cas (3)).

Dans l'intervalle $]1 + \sqrt{2}\ ;\ \frac{3}{2} + \sqrt{2}\ [$ se trouve le point "instable" $l_u = 2 + \sqrt{2}$

C'est-à-dire que l'application h est "dilatante" localement autour de $2 + \sqrt{2}$, c'est ce que l'on va montrer.

On cherche à prouver que v_n va s'éloigner de $2 + \sqrt{2}$ jusqu'à retomber dans un des intervalles déjà traités aux cas (1) , (2) ou (3).

Cherchons q tel que $|v_{n-1} - 2\sqrt{2}| \geq q|v_n - 2\sqrt{2}|$ avec q > 1

On a :

$$v_{n+1} - 2\sqrt{2} = \frac{(-1 + \sqrt{2})v_n}{v_n - 1 - \sqrt{2}} - 2\sqrt{2} = \frac{v_n(\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} + 4}{v_n - 1 - \sqrt{2}}$$
$$= \frac{v_n(-1 - \sqrt{2}) + 2\sqrt{2} + 4}{v_n - 1 - \sqrt{2}}$$

D'où :

$$v_{n+1} - 2\sqrt{2} = \frac{-(1 + \sqrt{2})(v_n - 2\sqrt{2})}{v_n - 1 - \sqrt{2}}$$

Et $1 + \sqrt{2} < v_n < \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ donne $0 < v_n - 1 - \sqrt{2} < \frac{1}{2}$ soit $\frac{1}{v_n - 1 - \sqrt{2}} > 2$

$$\left|\frac{-(1 + \sqrt{2})(v_n - 2\sqrt{2})}{v_n - 1 - \sqrt{2}}\right| > 2(1 + \sqrt{2}\,)|v_n - 2\sqrt{2}|$$

$$|v_{n+1} - 2\sqrt{2}| > 2(1 + \sqrt{2}\,)|v_n - 2\sqrt{2}|$$

L'application h est bien "dilatante" sur cet intervalle.

v_n s'éloigne de $2\sqrt{2}$ jusqu'à ce que soit $v_n > \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ (on retombe sur le cas 3) soit $v_n < \frac{7}{5} + \sqrt{2}$ et alors on montre que $v_{n+1} > \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ et on tombe à nouveau aussi sur le cas (3).

En effet on a, par récurrence immédiate, dans le cas où v_0 est dans $]\ 1 + \sqrt{2}\ ,\ \frac{3}{2} + \sqrt{2}\ [$:

$$|v_n - 2\sqrt{2}| > \left(2\left(1 + \sqrt{2}\,\right)\right)^n |v_0 - 2\sqrt{2}|$$

Avec $b_2 = \frac{7}{5} + \sqrt{2}$, et , pour rappel $b_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$

Prenons $d = Max\left(\lfloor b_1 - 2\sqrt{2}\rfloor, \lfloor b_2 - 2\sqrt{2}\rfloor\right)$

Cherchons n tel que $|v_n - 2\sqrt{2}| > d$, cela est vérifié pour n tel que :

$$\left(2(1+\sqrt{2}\,)\right)^n \,|v_0 - 2\sqrt{2}| > d \;\Leftrightarrow \left(2(1+\sqrt{2}\,)\right)^n > \frac{d}{|v_0 - 2\sqrt{2}|}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{d}{|v_0 - 2\sqrt{2}|}\right)}{\ln\left(2(1+\sqrt{2})\right)}$$

Conclusion : on a démontré le point (c), à savoir que (v_n) tend vers 0, et donc que (u_n) tend vers $2-\sqrt{2}$ dans les conditions du point (c) .