Exercice 2. Dans cet exercice, A désigne l'espace des fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$. On muni A de la multiplication ponctuelle des fonctions et pour $f \in A$, on pose :

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{t_1 \neq t_2 \in [0,1]} \frac{|f(t_1) - f(t_2)|}{|t_1 - t_2|}.$$

a) Montrer que A est une algèbre de Banach commutative et unitale. On ne détaillera que les points suivants : $\| \ \|$ est une norme, $(A, \| \ \|)$ est un espace complet et $\forall\ f, g \in A$, $\|fg\| \leq \|f\| \, \|g\|$.

b) Pour $f \in A$ et $t \in [0,1]$, on pose $\omega_t(f) = f(t)$. Montrer que $\Omega(A) = \{\omega_t;\ t \in [0,1]\}$. L'algèbre A est-elle semi-simple ?

c) On définit φ, de $[0,1]$ dans $\Omega(A)$ par $\varphi(t) = \omega_t$. Montrer que φ est un homéomorphisme de $[0,1]$ dans $\Omega(A)$ (muni de la topologie préfaible).

d) Montrer que la transformée de Gelfand est une application non surjective mais à image dense de A dans $C(\Omega(A))$.