DEVOIR MAISON N°3

– À REMETTRE LE LUNDI 26 FÉVRIER 2024 –

PROBLÈME - Étude de l'équation polynomiale $P(X^2) = P(X+a)P(X+b)$

Notations :

- *soient* $a, b \in \mathbb{C}$
- *on note* $(E_{a,b})$ *l'équation :* $P(X^2) = P(X+a)P(X+b)$, *d'inconnue* $P \in \mathbb{C}[X]$

Question préliminaire

Déterminer tous les polynômes constants solutions de $(E_{a,b})$

Notation & Objectif :

- *on note* $\mathscr{S}_{a,b}$ *l'ensemble des polynômes non constants solutions de* $(E_{a,b})$
- *l'objectif du problème est de déterminer la structure de l'ensemble* $\mathscr{S}_{a,b}$ *lorsque celui-ci n'est pas vide*

Partie I - Le cas particulier où $a = b$

Dans cette partie, on suppose $a = b$

L'équation, $(E_{a,a})$*, se réécrit donc :* $P(X^2) = [P(X+a)]^2$

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant.
   On note p le nombre de racines complexes *distinctes* de P
   (a) Justifier : $p \in \mathbb{N}^*$
   (b) Déterminer le nombre de racines complexes *distinctes* du polynôme $[P(X+a)]^2$
   (c) Déterminer de même le nombre de racines complexes *distinctes* du polynôme $P(X^2)$ *(discuter selon* $P(0)$*)*
2. (a) Montrer à présent qu'un polynôme de $\mathscr{S}_{a,a}$ est nécessairement de la forme X^n, $n \in \mathbb{N}^*$
   (b) Décrire enfin $\mathscr{S}_{a,a}$ dans les deux cas : $a \neq 0$ et $a = 0$

Partie II - Structure de $\mathscr{S}_{a,b}$ lorsque $\mathscr{S}_{a,b} \neq \varnothing$

Dans cette partie, a et b sont de nouveau quelconques, et on suppose également que l'ensemble $\mathscr{S}_{a,b}$ *n'est pas vide.*

1. Montrer que $\mathscr{S}_{a,b}$ est stable par produit.
2. Montrer qu'un polynôme $P \in \mathscr{S}_{a,b}$ est toujours unitaire.
3. Dans cette question, on suppose que $\mathscr{S}_{a,b}$ contient deux polynômes P et Q de même degré, noté $d \in \mathbb{N}^*$, et on note $D(X) = P(X) - Q(X)$
   (a) Montrer : $D(X^2) = P(X+a)D(X+b) + D(X+a)Q(X+b)$
   (b) En déduire : $D(X) = 0$. Qu'en conclut-on ?
4. Établir alors que $\mathscr{S}_{a,b}$ contient un unique polynôme de degré minimal.

Vocabulaire & Notation :

- *ce polynôme est appelé polynôme minimal de l'équation* $(E_{a,b})$
- *on le note M dans la fin du problème, et on note également m son degré, i.e.* $m = \deg(M)$

5. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire.
   On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P^n \in \mathscr{S}_{a,b}$
   On note ici, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$
   (a) Établir, pour tous $A, B \in \mathbb{C}[X]$, l'identité : $A^n - B^n = \prod_{k=0}^{n-1}(A - \omega_k B)$
   (b) En déduire qu'il existe un entier $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\omega_k P \in \mathscr{S}_{a,b}$, puis que P appartient lui-même à $\mathscr{S}_{a,b}$

6. Soit $P \in \mathscr{S}_{a,b}$, de degré noté $n \in \mathbb{N}^*$
   On note $\delta = m \wedge n$, et on réécrit $m = \delta m'$, $n = \delta n'$, avec $m' \wedge n' = 1$
   (a) Établir : $M^{n'} = P^{m'}$ *(utiliser 3.)*

   On note alors $a_1, \ldots, a_r$ les racines complexes distinctes de M (et donc de P)

   (b) Justifier l'existence de $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{N}^*$ tels que : $M = \prod_{k=1}^{r}(X - a_k)^{\alpha_k}$ et $P = \prod_{k=1}^{r}(X - a_k)^{\beta_k}$
   (c) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe $\gamma_k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha_k = \gamma_k m'$
   (d) En considérant le polynôme $Q = \prod_{k=1}^{r}(X - a_k)^{\gamma_k}$, établir : $P = M^{n'}$

7. Établir enfin : $\mathscr{S}_{a,b} = \left\{M^s,\ s \in \mathbb{N}^*\right\}$