Soit la fonction $\mathbf{T_{3^m}}$ *de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{N}^*$ *définit par* : $\mathbf{T_{3^m}}(N) = \begin{cases} \frac{N}{2}, & \text{si } N \text{ est pair} \\ 3 \times N + 3^m, & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases}$

En appliquant cette fonction successivement au résultat précédant, on obtient la suite $\mathbf{S}\{\mathbf{T_{3^m}(N)}\} = \{N, N_1, N_2, \ldots N_k, \ldots\}$

Une suite de Syracuse multipliée par 3^m *sera dite homothétique de la suite de Syracuse dans le rapport* 3^m.

On se propose de montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*$ *la suite* $\mathbf{S}\{\mathbf{T_{3^m}(N)}\}$ *atteindra une suite homothétique d'une suite de Syracuse dans le rapport* 3^m *après un nombre fini d'itérations.*

$\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists\ \mathbf{i} \in [0, m]$ *tel que* $N \equiv 0 \pmod 3^i$
Une ou plusieurs valeurs de $\mathbf{i}$ *existent. Prenons pour* $\mathbf{i}$ *la plus grande. On a donc* $N = 3^i$.

1. $i = m$: *N est déjà dans une suite homothétique d'une suite de Syracuse dans le rapport* 3^m
2. $i < m$: *Montrons comment les itrations vont modifier* i :
   Deux cas se présentent suivant la parité de N.
   (a) *N est pair, on devra donc le diviser par 2.*
   on a $N \equiv 0 \pmod 3^i$ *donc* $\frac{N}{2} \equiv 0 \pmod 3^i$ *et i ne changera pas.*

   (b) *N est impair, on devra donc le multiplier par 3 et ajouter* 3^m.
   $N = k * 3^m + 3^i,\ N \to 3N + 3^m = 3(k * 3^m + 3^i) + 3^m$
   $= (3k + 1)3^m + 3 * 3^i \equiv 0 \pmod{3^{i+1}}$. *i augmente de 1 dans cette itération.*

   En divisant N par 2 et en répétant l'opération tant que possible, on obtiendra un nombre impair après un nombre fini d'itérations. L'itération suivante augmentera i de 1 et ce jusqu'à ce que $i = m$.
   Ainsi on aura atteint une suite homothétique d'une suite de Syracuse dans le rapport 3^m.

page 2