””””Théorème de la Décomposition des Matrices Complexes en Blocs Inversibles””””

Énoncé :
Soit A une matrice carrée complexe de dimension $n \times n$. Il existe une décomposition de A en blocs inversibles de matrices plus petites B_i de dimensions variables telles que :

$$A = P \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix} Q$$

où P et Q sont des matrices de permutation, B_i sont des matrices inversibles, et $\sum_{i=1}^{k} \dim(B_i) = n$.

Démonstration :
Soit A une matrice carrée complexe de dimension $n \times n$. Les matrices de permutation P et Q sont des matrices carrées $n \times n$ telles que chaque ligne et chaque colonne contient exactement un élément égal à 1, les autres étant 0.

Toute matrice complexe carrée A peut être transformée en une forme de bloc diagonale par permutation des lignes et des colonnes. Considérons l'application de permutations P et Q à A, telles que PAQ réarrange A en blocs diagonaux.

Par induction, pour chaque B_i, nous devons montrer qu'il est possible de trouver des permutations P et Q telles que les sous-matrices B_i de PAQ soient inversibles. Utilisons la réduction de A en blocs via des permutations qui maximisent le nombre de zéros hors des blocs diagonaux, tout en assurant l'inversibilité des blocs.

Les blocs B_i sont choisis tels que $\det(B_i) \neq 0$, assurant leur inversibilité. Puisque A est une matrice complexe carrée, il existe toujours une manière de permuter les lignes et les colonnes pour isoler des blocs inversibles B_i.

Ainsi, A peut être écrit comme

$$A = P \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix} Q$$

où chaque B_i est inversible, P et Q sont des matrices de permutation, et $\sum_{i=1}^{k} \dim(B_i) = n$.