EPREUVE DE CONCOURS BLANC (4h)

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n+2)}$.

1. Déterminer des constantes a, b telles que $\dfrac{1}{x(x+2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+2}$ pour tout $x \notin \{0, -2\}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme éventuelle.

Exercice 2 Déterminer la nature des séries de termes généraux suivants $u_n = \dfrac{n+1+2^n}{n!}$ et $v_n = \dfrac{(\ln n)^3}{n^2}$.

Exercice 3 On dispose de deux pièces A et B donnant pile avec probabilités a et b. Une étape du jeu consiste à lancer simultanément les deux pièces. On effectue n étapes indépendantes de ce jeu et on note X le nombre d'étapes où les deux pièces ont donné un résultat différent. Ensuite, on refait X étapes du jeu et on note Y le nombre total de piles obtenu avec la pièce A au cours de ces X dernières étapes.

1. A chacune des n premières étapes, quelle est la probabilité que les deux pièces donnent des résultats différents ?
2. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
3. Soit $0 \leqslant i \leqslant n$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Sachant $X = i$, calculer $P_{[X=i]}(Y = k)$.
4. Soit $0 \leqslant k \leqslant i \leqslant n$. Calculer $\binom{n}{i}\binom{i}{k}$ sous forme de produit de deux autres coefficients binomiaux.
5. En déduire la loi de Y.

Exercice 4 Soient E un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (s_1, s_2, s_3)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de E associé à A dans la base $\mathcal{B}$.

1. Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$, $\mathrm{Ker}A$, $\mathrm{Im}A$.
2. Calculer $(A - I_3)^2$. Déterminer $w \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$ tel que $w \notin \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
3. On pose $v = (f - \mathrm{Id})(w)$ et on prend $u \neq 0$ dans $\mathrm{Ker}f$. Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de E.
4. Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$.
5. Donner la relation entre A et B en précisant les matrices de passage.

Exercice 5 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}f$. Donner le rang de f.
2. On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer des bases $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ dans lesquelles la matrice de f est J_1.
3. En déduire une relation entre M et J_1 (on écrira explicitement les matrices de passage impliquées).

Problème 1 Une pièce donne pile avec probabilité $p \in]0,1[$. Côté pile est inscrit le nombre 1, côté face le nombre 0. On note $q = 1 - p$. On effectue une suite infinie de lancers de cette pièce et on regarde les nombres 1 ou 0 successivement obtenus. On appelle **blocs** les suites de résultats consécutifs identiques et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note L_n la longueur du n-ème bloc et X_n la valeur commune du n-ème bloc. Par exemple, si la suite de lancers commence par 11000100001 alors $L_1 = 2$, $L_2 = 3$, $L_3 = 1$,$L_4 = 4$, $X_1 = 1$, $X_2 = 0$, $X_3 = 1$, $X_4 = 0$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on notera $S_i = L_1 + L_2 + \cdots + L_i$ et F_i l'évènement « obtenir face à l'instant i » . Si X, Y sont deux variables, on s'autorisera à écrire $P(X = i \cap Y = j)$ à la place de $P([X = i] \cap [Y = j])$ pour simplifier les écritures. On rappelle que si $x \in]-1,1[$ la série $\sum nx^{n-1}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

1. Déterminer la loi de X_1. Rappeler son espérance et sa variance.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X_{2n-1} et celle de X_{2n}.
3. Déterminer la loi de L_1.
4. En utilisant l'espérance d'une loi géométrique, montrer que $E(L_1)$ existe et la calculer.
5. Calculer $P(L_1 = i \cap L_2 = j)$ pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
6. En utilisant une famille complète d'évènements, en déduire la loi de L_2 puis son espérance.
7. Montrer que $E(L_1) \geqslant E(L_2)$ avec égalité si et seulement si $p = 1/2$.
8. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\lim\limits_{i \to +\infty} P_{[L_1 = i]}(L_2 = j)$. On distinguera des cas en fonction de p.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \geqslant 2n-2$ et $i \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(X_1 = 1 \cap S_{2n-2} = k \cap L_{2n-1} = i)$ en fonction de $P(X_1 = 1 \cap S_{2n-2} = k)$. En déduire la valeur de $P(X_1 = 1 \cap L_{2n-1} = i)$. Donner sans justification la valeur de $P(X_1 = 0 \cap L_{2n-1} = i)$.En déduire $P(L_{2n-1} = i)$. Que remarque-t-on ? Que conjecturez-vous sur la loi de L_{2n} ?

Problème 2 ENS 2016 Soit $n \geqslant 1$ un entier. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $f(x,x) \geqslant 0$.
2. Trouver toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}^n$ telles que $f(x,x) = 0$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on définit la fonction g_x de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par $g_x(y) = f(x,y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que g_x est une application linéaire.
4. Si $x \neq 0$, quels sont le rang et la dimension du noyau du g_x ?
5. On rappelle que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et que $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = n$. Montrer que l'application $G : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ x & \mapsto & g_x \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Dans la suite de l'exercice, on fixe un autre entier $m \geqslant 2$. On a n joueurs avec lesquelles on constitue m équipes différentes. On suppose que deux équipes différentes quelconques ont toujours le même nombre de joueurs en commun. On veut montrer que $m \leqslant n$. Précisément, on considère des sous-ensembles différents $S_1, \ldots, S_m$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ (ainsi $S_j \neq S_k$ dès que $j \neq k$) et on suppose qu'il existe un entier ℓ avec $1 \leqslant \ell \leqslant n$ tel que $\mathrm{card}(S_j \cap S_k) = \ell$ dès que $j \neq k$. Le but de cet exercice est de montrer que $m \leqslant n$. On introduit la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } j \in S_i \\ 0 & \text{si } j \notin S_i \end{array} \right.$$

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, on note aussi L_i la i-ème ligne de A.

1. Montrer que $\mathrm{card}(S_j) \geqslant \ell$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$.
2. Montrer que $f(L_j, L_j) \geqslant \ell$ et $f(L_j, L_k) = \ell$ dès que $j \neq k$.
3. On suppose dans la suite que $m > n$. Montrer que la famille $(L_1, \ldots, L_m)$ est liée. On fixe dans la suite des nombres réels $r_1, \ldots, r_m$ non tous nuls tels que $r_1 L_1 + ... + r_m L_m = 0$.

4. Montrer que $\sum_{j=1}^{m} r_j^2 f(L_j, L_j) + 2\ell \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant m} r_j r_k = 0$.
5. En déduire que $\sum_{j=1}^{m} r_j^2 (f(L_j, L_j) - \ell) + \ell \left(\sum_{j=1}^{m} r_j \right)^2 = 0$.
6. Aboutir à une contradiction.