b) Soit $f : E \to K$ une application borélienne.

Montrons que $f = 0$ presque partout sur $E \setminus \mathrm{Supp}(f)$.

On veut montrer que :

$N = \{ x \in E \setminus \mathrm{Supp}(f) \ ; \ f(x) \neq 0 \}$ est de mesure nulle.

On a : $E \setminus \mathrm{Supp}(f) = \bigcup_{O \in N_f} O$

(*) Comme $(\mathbb{R}^d, d)$ est séparable, alors (E, d_E) est également séparable.
Par la propriété de Lindelhöf, comme $(O)_{O \in N_f}$ est une famille d'ouverts de (E, d_E), il existe un sous-ensemble $I \subseteq N_f$ au plus dénombrable et tel que :

$$E \setminus \mathrm{Supp}(f) = \bigcup_{O \in N_f} O = \bigcup_{O \in I} O$$

Dès lors, on a :

$$N = [E \setminus \mathrm{Supp}(f)] \cap f^{-1}(K^*)$$

$$= \left(\bigcup_{O \in I} O \right) \cap f^{-1}(K^*)$$

$$= \bigcup_{O \in I} O \cap f^{-1}(K^*)$$

Soit $\mathcal{O} \in I$.
Alors, $\mathcal{O}$ est un ouvert de E, donc $\mathcal{O} \in \mathcal{B}(E)$.
Puis, f est borélienne et $K^* \in \mathcal{B}(K)$ donc $f^{-1}(K^*) \in \mathcal{B}(E)$.
Ainsi : $\mathcal{O} \cap f^{-1}(K^*) \in \mathcal{B}(E)$.

Comme I est au plus dénombrable, il s'ensuit :

$$N = \left(\bigcup_{\mathcal{O} \in I} \mathcal{O} \cap f^{-1}(K^*) \right) \in \mathcal{B}(E).$$

Or on a par définition de N_f :

$$\forall \mathcal{O} \in N_f,\ \lambda_d(\mathcal{O} \cap f^{-1}(K^*)) = 0$$

Comme $I \subseteq N_f$, on a :

$$\forall \mathcal{O} \in I,\ \lambda_d(\mathcal{O} \cap f^{-1}(K^*)) = 0$$

Donc par sous-sigma additivité, on obtient :

$$\lambda_d(N) = \lambda_d\left(\bigcup_{\mathcal{O} \in I} \mathcal{O} \cap f^{-1}(K^*) \right)$$

$$\leq \sum_{\mathcal{O} \in I} \lambda_d(\mathcal{O} \cap f^{-1}(K^*))$$

$$\leq 0$$

Ainsi, $\lambda_d(N) = 0$, ce que nous voulions.

i.e : $f = 0$ λ_d-p.p sur $E \setminus \mathrm{Supp}(f)$.