2. Extrema relatifs (Gourdon p236)

Dans toute cette section, U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et la norme d'un vecteur sera la norme du sup relativement à la base canonique.

Prop 1. Si $f : U \to \mathbb{R}$ admet un extremum relatif en un point $a \in U$ et si f est différentiable en a, alors $df(a) = 0$ (en d'autres termes $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$).

Pv. Supposons par contraposée qu'il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \neq 0$.
Montrons que alors, a n'est pas un extremum de f.
Comme $a \in U$ et que U est ouvert, fixons $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq U$.
Considérons alors comme f est différentiable en a, $\varepsilon : B(a, r) \to \mathbb{R}$ telle que :

i) $\forall h \in B(0, r)$,
$$f(a + h) - f(a) = df(a)(h) + \varepsilon(h)$$

ii) $\displaystyle\lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^m}} \frac{|\varepsilon(h)|}{\|h\|} = 0$

Sans perte de généralité, supposons que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) > 0$.
Fixons $\eta > 0$ tel que :

(*) $\forall h \in \mathbb{R}^m, \|h\| \leq \eta \Rightarrow |\varepsilon(h)| \leq \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \times \frac{1}{2} \times \|h\|$

Pour $t \in [-\eta, \eta]$, posons $h_i(t) = te_i$.

Soit $t \in]0, \eta]$. On a :
$$\|h_i(t)\| = t \leq \eta$$
Donc $|\varepsilon(h_i(t))| \leq \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \times \frac{1}{2} \times t$ par (*).

D'où :
$$\begin{aligned}
f(a + h_i(t)) - f(a) &= df(a)(h_i(t)) + \varepsilon(h_i(t)) \\
&\geq df(a)(te_i) - |\varepsilon(h_i(t))| \\
&= t\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - t \times \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \\
&= t\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \times \frac{1}{2} \\
&> 0 \quad \text{car } t > 0, \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) > 0
\end{aligned}$$

Ainsi a ne peut pas être un maximum local.

Pour $t \in [-\eta, 0[$, on a :
$$\|h_i(t)\| = -t \leq \eta$$

Donc :
$$\begin{aligned}
f(a + h_i(t)) - f(a) &= df(a)(h_i(t)) + \varepsilon(h_i(t)) \\
&\leq df(a)(te_i) + |\varepsilon(h_i(t))| \\
&= t\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - t \times \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \\
&= t\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \times \frac{1}{2} \\
&< 0 \quad \text{car } t < 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) > 0
\end{aligned}$$

Finalement, a ne peut pas être un extremum local pour f.

Par contraposée, si a est un extremum local de f et si f est différentiable en a, alors $df(a) = 0$.