CONSTANTE D'APERY

APPROXIMATION DE MARC AMON

$$\zeta(3) = \frac{\pi^2}{3} - \sqrt[4]{19} = 1,2020$$

23 JUIN 2025

MARC AMON
E-mail : amonahoulou@gmail.com
Dabou, Côte d'Ivoire

Ce document vise à montrer une méthode de calcul conduisant à une expression simplifiée de la fonction ζ(3) (constante d'Apery). Je présente donc une approximation de la valeur de ζ(3) par une expression simple qui vérifie sa valeur réelle à l'ordre 4. Toutes mes excuses à toutes personnes, les grands des mathématiques qui trouverons mon approche peu conventionnelle. Néanmoins vu le degré de difficulté de la chose, j'ai voulu quand même rester dans l'évidence.

« Je te loue, Père, Seigneur du ciel et de la terre de ce que tu as caché ces choses aux sages et aux intelligents, et de ce que tu les as révélées aux enfants. »

Matthieu 11 : 25

‘‘Avant de commencer, je tiens à rappeler que l’expression finale obtenue n’est qu’une approximation de $\zeta(3)$. Sa valeur se rapproche grandement de celle de $\zeta(3)$ et la vérifie pour les 4 premières décimales.’’

Commençons !

SOMMAIRE

I- EXPRESSION SIMPLE DE ζ(3) : APPROXIMATION DE MARC AMON

Considérons la fonction g définition sur un intervalle I, avec $g(x)=e^{\alpha x}\cos(\beta x)$. α et β sont des nombres non nuls.

Soit

$$I = \int g(x)dx = \int e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx$$

en calculant cette intégrale par une intégration par partie, on a :

$u = e^{\alpha x}$ $\qquad$ $u' = \alpha e^{\alpha x}$

$v = \frac{1}{\beta}\sin(\beta x)$ $\qquad$ $v' = \cos(\beta x)$

$$Rappelons\ que\ \int u.v' = u.v - \int u'.v$$

$$I = \int e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx$$

$$= \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx$$

En considérant maintenant la nouvelle intégrale, on a :

$u = e^{\alpha x}$ $\qquad$ $u' = \alpha e^{\alpha x}$

$v = -\frac{1}{\beta}\cos(\beta x)$ $\qquad$ $v' = \sin(\beta x)$

ainsi

$$= \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx$$

$$I = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2}.I$$

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right).I = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

$$I = \left(\frac{\beta^2}{\beta^2 + \alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos(\beta x)\right)$$

$$I = \left(\frac{\beta^2}{\beta^2 + \alpha^2}\right)\frac{1}{\beta}\left(e^{\alpha x}\sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta}e^{\alpha x}\cos(\beta x)\right)$$

$$I = \frac{\beta}{\beta^2+\alpha^2}(e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha x} \cos(\beta x))$$

Reconsidérons la même fonction *g(x)=e*$^{\alpha x}$*cos(βx)* et intégrons celle-ci à plusieurs reprises jusqu'à l'infini.

On a :

$$I = \int e^{\alpha x}\, cos(\beta x) dx$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\, sin(\beta x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta}(-\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\, cos(\beta x)\, dx)$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\, cos(\beta x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^3} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + \frac{\alpha^3}{\beta^3}\int e^{\alpha x}\, sin(\beta x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^3} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) - \frac{\alpha^3}{\beta^4} e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \frac{\alpha^4}{\beta^4}\int e^{\alpha x}\, cos(\beta x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^3} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) - \frac{\alpha^3}{\beta^4} e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \frac{\alpha^4}{\beta^5} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) - \frac{\alpha^5}{\beta^5}\int e^{\alpha x}\, sin(\beta x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^3} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) - \frac{\alpha^3}{\beta^4} e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \frac{\alpha^4}{\beta^5} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + \frac{\alpha^5}{\beta^6} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \cdots$$

En regroupant les termes du sinus d'un côté et ceux du cosinus d'un autre côté, on a :

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^3} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + \frac{\alpha^4}{\beta^5} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) - \cdots + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \frac{\alpha^3}{\beta^4} e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \frac{\alpha^5}{\beta^6} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \cdots$$

$$= (\frac{1}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta^3} + \frac{\alpha^4}{\beta^5} - \cdots) e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + (\frac{\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^3}{\beta^4} + \frac{\alpha^5}{\beta^6} - \cdots) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$= (\frac{1}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta^3} + \frac{\alpha^4}{\beta^5} - \cdots)e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + (\frac{1}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta^3} + \frac{\alpha^4}{\beta^5} - \cdots)\frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$I = (\frac{1}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta^3} + \frac{\alpha^4}{\beta^5} - \cdots)(e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha x} \cos(\beta x))$$

Par équivalence, on obtient la relation suivante

$$\frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta^3} + \frac{\alpha^4}{\beta^5} - \frac{\alpha^4}{\beta^5} + \frac{\alpha^4}{\beta^5} - \cdots$$

Ce qui équivaut à

$$\frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{\beta^{2n+1}}$$

On obtient aussi :

$$\frac{1}{\beta - 1} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\beta^n}$$

En dérivant cette expression en fonction de β, on obtient également :

$$\frac{1}{(\beta - 1)^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{\beta^{n+1}}$$

Utilisons cette dernière relation en rouge pour faire apparaitre l'expression de ζ(3).

$$\frac{1}{(\beta - 1)^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{\beta^{n+1}}$$

$$\frac{1}{(\beta - 1)^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{3}{\beta^4} + \frac{4}{\beta^5} + \frac{5}{\beta^6} + \frac{6}{\beta^7} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \sum_{n \geq 3} \frac{n}{\beta^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \sum_{n \geq 1} \frac{n+2}{\beta^{n+3}}$$

$$= \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^3} \sum_{n \geq 1} \frac{n+2}{\beta^n}$$

$$= \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^3} (\sum_{n \geq 1} \frac{n}{\beta^n} + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\beta^n})$$

$$= \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^3} \frac{\beta}{(\beta - 1)^2} + \frac{1}{\beta^3} \frac{2}{\beta - 1}$$

$$= \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{\beta}{\beta^3(\beta-1)^2} + \frac{2(\beta-1)}{\beta^3(\beta-1)^2}$$

$$\frac{1}{(\beta-1)^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{3\beta-2}{\beta^3(\beta-1)^2}$$

Posons β = 2x

$$\frac{1}{(2x-1)^2} = \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4x^3} + \frac{6x-2}{8x^3(2x-1)^2}$$

Rappelons que :

$$\zeta(2) = \sum_{x\geq 1} \frac{1}{x^2} = \sum_{x\geq 1} \frac{1}{(2x)^2} + \sum_{x\geq 1} \frac{1}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{x\geq 1} \frac{1}{x^2} + \sum_{x\geq 1} \frac{1}{(2x-1)^2}$$

$ainsi,$

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = \sum_{x\geq 1} \frac{1}{(2x-1)^2}$$

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = \sum_{x\geq 1} \left(\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4x^3} + \frac{6x-2}{8x^3(2x-1)^2}\right)$$

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{1}{4}\zeta(2) + \frac{1}{4}\zeta(3) + \frac{1}{4}\sum_{x\geq 1} \frac{3x-1}{x^3(2x-1)^2}$$

$$\frac{1}{2}\zeta(2) = \frac{1}{4}\zeta(3) + \frac{1}{4}\sum_{x\geq 1} \frac{3x-1}{x^3(2x-1)^2}$$

$$2\zeta(2) = \zeta(3) + \sum_{x\geq 1} \frac{3x-1}{x^3(2x-1)^2}$$

$$\zeta(3) = 2\zeta(2) - \sum_{x\geq 1} \frac{3x-1}{x^3(2x-1)^2} = 1{,}2020569032\ldots$$

Ainsi on obtient donc une expression reliant à la fois **ζ(3)**, **ζ(2)** et une constante d'Amon Ă***m***.

$$\zeta(3) = 2\zeta(2) - \breve{A}m \qquad avec \qquad \breve{A}m = \sum_{x\geq 1} \frac{3x-1}{x^3(2x-1)^2}$$

$$\zeta(3) = \frac{\pi^2}{3} - \breve{A}m \qquad avec \qquad \breve{A}m = \sum_{x\geq 1} \frac{3x-1}{x^3(2x-1)^2} = 2.0878112305\ldots$$

Cette constante d'Amon Ă***m*** a une valeur irrationnelle car elle provient de la différence de **ζ(3)** et **ζ(2),** tous deux irrationnels.

Apres plusieurs tentatives pour trouver une forme simple de cette constante d'Amon $\breve{A}\boldsymbol{m}$, tout mes efforts ont été en vain. La seule chose que je peux affirmer est que cette constante est sensiblement égale à $\sqrt[4]{19}$ au 3 premières décimales.

$$\breve{A}m = \sum_{x\geq 1} \frac{3x-1}{x^3(2x-1)^2} = 2.0878112305\ldots$$

$$\sqrt[4]{19} = 2.0877976299\ldots$$

Ainsi en faisant l'arrondi de ces deux valeurs à l'ordre 4, on a :

$$\sum_{x\geq 1} \frac{3x-1}{x^3(2x-1)^2} = \sqrt[4]{19} = 2.0878$$

Par conséquent, en gardant les 4 premières décimales de **ζ(3),** on obtient :

$$\boldsymbol{\zeta(3)} = \frac{\pi^2}{3} - \sqrt[4]{19} = 1{,}2020$$

$$(l'approximation\ de\ Marc\ AMON)$$

En gardant les 10 premières décimales, on a :

$$\frac{\pi^2}{3} - \sqrt[4]{19} = \mathbf{1,2020}705038\ldots$$

$$\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{3}) = \mathbf{1,2020569031}\ldots$$

L'expression finale obtenue n'est qu'une approximation de ζ(3). Sa valeur se rapproche grandement de celle de ζ(3) et la vérifie pour les 4 premières décimales.

II- <u>AUTRES EXPRESSIONS ζ(3)</u>

Il existe plusieurs autres expressions de ζ(3) en fonction des constantes d'Amon $\breve{A}\boldsymbol{m}$ et de ζ(n)**.**

$$\zeta(3) = 2\zeta(2) - \frac{3}{4}\zeta(4) - \frac{1}{4}\sum_{x\geq 1} \frac{8x-3}{x^4(2x-1)^2} = 1{,}2020569032\ldots$$

$$\zeta(3) = 2\zeta(2) - \frac{1}{4}\zeta(4) - \frac{1}{4}\sum_{x\geq 1} \frac{8x^2-1}{x^4(2x-1)^2} = 1{,}2020569032\ldots$$

$$\zeta(3) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sum_{x\geq 2}\frac{3x-2}{x^3(x-1)^2} = 1{,}2020569032\ \ldots$$

$$\zeta(3) = 2\zeta(2) - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{n+2}{2^n}\zeta(n+3)$$

$$\zeta(3) = \frac{1}{7}\sum_{n\geq 1}\frac{n(n+1)}{2^n}\zeta(n+2)$$

III- <u>EXPRESSIONS DE ZETA ζ EN FONCTION DE n</u>

$$\sum_{n\geq 1}(\zeta(2n+1)-1) = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n\geq 1}(\zeta(2n)-1) = \frac{3}{4}$$

$$\sum_{n\geq 2}(-1)^n(\zeta(n)-1) = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n\geq 2}(\zeta(n)-1) = 1$$

$$\sum_{n\geq 2}n(\zeta(n+1)-1) = 1$$

$$\sum_{n\geq 2}(-1)^n.n(\zeta(n+1)-1) = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n\geq 1}n(\zeta(2n+1)-1) = \frac{5}{16}$$

$$\sum_{n\geq 1}n(\zeta(2n+3)-1) = \frac{1}{16}$$