PREUVE DE L'IRRATIONALITE DE $\zeta(5)$

MARC AMON

DATE : 07 JANVIER 2026

Email : amonahoulou@gmail.com
Contact WhatsApp : (+225) 0789 854 366
Bounadiali, Côte d'Ivoire

Ce document vise à apporter une preuve de l'irrationalité de $\zeta(5)$ en se basant sur $\zeta(3)$ (constante d'Apery) qui déjà est irrationnel. Je présente un chemin méthodique suivant la logique et s'appuyant sur les règles de l'arithmétique. Toutes mes excuses à toutes personnes, les grands des mathématiques qui trouveront mon approche peu conventionnelle. Néanmoins vu le degré de difficulté de la chose, j'ai voulu quand même rester dans l'évidence.

« Je te loue, Père, Seigneur du ciel et de la terre de ce que tu as caché ces choses aux sages et aux intelligents, et de ce que tu les as révélées aux enfants. »

Matthieu 11 : 25

De manière simple, le travail se fera comme suite :

- *Nous ferons d'abord un rappel des propriétés arithmétiques que nous utiliserons dans cette démarche ;*
- *Nous montrerons ensuite qu'il existe une relation entre $\zeta(3)$ et $\zeta(5)$ de la forme $\zeta(5) = q - \zeta(3)$, en spéculant sur la rationalité ou l'irrationalité de q ;*
- *Enfin nous montrerons que pour q qui est rationnel, $\zeta(5)$ est irrationnel (par des règles arithmétiques) et pour q irrationnel, $\zeta(5)$ est irrationnel (par une démonstration par l'absurde).*

SOMMAIRE

I. RAPPELS DES PROPRIETES ARITHMETIQUE

Faisons un rappel des propriétés arithmétiques concernant les sommes des nombres rationnels et irrationnels :

Propriété Arithmétique 1 : *rationnel $\pm$ rationnel $=$ toujours rationnel*

Propriété Arithmétique 2 : *rationnel $\pm$ irrationnel $=$ toujours irrationnel*

Propriété Arithmétique 3 : *irrationnel $\pm$ irrationnel $=$ peut-être rationnel ou irrationnel*

Ces propriétés nous permettrons de développer notre théorie.

Aussi un autre calcul essentiel à notre développement dont nous utiliserons le résultat dans la suite.
Démontrons par l'absurde que pour $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, deux nombres irrationnels, si $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ est rationnel alors $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ est forcément irrationnel.

Supposons que la somme de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, ces deux nombres irrationnels est rationnel.

- *On a $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}$ où r est rationnel (1)*
- *Supposons que $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{q}$ où q est rationnel (2)*

Ainsi recherchons les expressions de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$:

En faisant (1)+(2), on a : $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{q}$

$$\boldsymbol{2a}=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{q}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{2}}$$

En faisant (1) - (2), on a : $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}$

$$-\boldsymbol{2b}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}$$

$$\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{2}}$$

Ainsi on obtient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ rationnels ce qui est contraire à l'énoncé qui précise que $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont irrationnels. Par conséquent, l'hypothèse selon laquelle $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ est rationnel est fausse.
On en conclut donc que $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ est irrationnel.

Donc pour a et b deux nombres irrationnels si $a-b$ est rationnel alors $a+b$ est forcément irrationnel.

II. EXPRESSION RELIANT ζ(3) ET ζ(5)

Considérons la fonction g définition sur un intervalle I, avec *g(x)*=$e^{\alpha x}cos(\beta x)$. α et β sont des nombres non nuls.

Soit

$$I = \int g(x)dx = \int e^{\alpha x}\, cos(\beta x)dx$$

en calculant cette intégrale par une intégration par partie, on a :

$u = e^{\alpha x}$ $\qquad$ $u' = \alpha e^{\alpha x}$

$v = \frac{1}{\beta} sin(\beta x)$ $\qquad$ $v' = cos(\beta x)$

$$Rappelons\ que\ \int u.v' = u.v - \int u'.v$$

$$I = \int e^{\alpha x}\, cos(\beta x)dx$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\, sin(\beta x)\, dx$$

En considérant maintenant la nouvelle intégrale, on a :

$u = e^{\alpha x}$ $\qquad$ $u' = \alpha e^{\alpha x}$

$v = -\frac{1}{\beta} cos(\beta x)$ $\qquad$ $v' = sin(\beta x)$

ainsi

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\, sin(\beta x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta}(-\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\, cos(\beta x)\, dx)$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\, cos(\beta x)\, dx$$

$$I = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2}.I$$

$$(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}).I = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$I = (\frac{\beta^2}{\beta^2 + \alpha^2})(\frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x))$$

$$I = (\frac{\beta^2}{\beta^2 + \alpha^2})\frac{1}{\beta}(e^{\alpha x}\, sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha x} \cos(\beta x))$$

$$I = \frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2}(e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha x} \cos(\beta x))$$

Reconsidérons la même fonction $g(x)=e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et intégrons celle-ci à plusieurs reprises jusqu'à l'infini.

On a :

$$I = \int e^{\alpha x} \cos(\beta x) dx$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin(\beta x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta}(-\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \cos(\beta x)\, dx)$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int e^{\alpha x} \cos(\beta x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^3} e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \frac{\alpha^3}{\beta^3} \int e^{\alpha x} \sin(\beta x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^3} e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\alpha^3}{\beta^4} e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \frac{\alpha^4}{\beta^4} \int e^{\alpha x} \cos(\beta x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^3} e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\alpha^3}{\beta^4} e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \frac{\alpha^4}{\beta^5} e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\alpha^5}{\beta^5} \int e^{\alpha x} \sin(\beta x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^3} e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\alpha^3}{\beta^4} e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \frac{\alpha^4}{\beta^5} e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \frac{\alpha^5}{\beta^6} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \cdots$$

En regroupant les termes du sinus d'un côté et ceux du cosinus d'un autre côté, on a :

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^3} e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \frac{\alpha^4}{\beta^5} e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \cdots + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \frac{\alpha^3}{\beta^4} e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \frac{\alpha^5}{\beta^6} e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \cdots$$

$$= (\frac{1}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta^3} + \frac{\alpha^4}{\beta^5} - \cdots) e^{\alpha x} \sin(\beta x) + (\frac{\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^3}{\beta^4} + \frac{\alpha^5}{\beta^6} - \cdots) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$= (\frac{1}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta^3} + \frac{\alpha^4}{\beta^5} - \cdots)e^{\alpha x}\,sin(\beta x) + (\frac{1}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta^3} + \frac{\alpha^4}{\beta^5} - \cdots)\frac{\alpha}{\beta}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

$$I = (\frac{1}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta^3} + \frac{\alpha^4}{\beta^5} - \cdots)(e^{\alpha x}\,sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta}e^{\alpha x}\cos(\beta x))$$

Par équivalence, on obtient la relation suivante

$$\frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta^3} + \frac{\alpha^4}{\beta^5} - \frac{\alpha^6}{\beta^7} + \frac{\alpha^8}{\beta^9} - \cdots$$

Ce qui équivaut à

$$\frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{\beta^{2n+1}}$$

On obtient aussi :

$$\frac{1}{\beta - 1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\beta^n}$$

En dérivant cette expression en fonction de β, on obtient également :

$$\frac{1}{(\beta - 1)^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{n}{\beta^{n+1}}$$

Utilisons cette dernière relation en rouge pour faire apparaitre l'expression reliant ζ(3) et ζ(5).

$$\frac{1}{(\beta - 1)^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{n}{\beta^{n+1}}$$

$$\frac{1}{(\beta - 1)^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{3}{\beta^4} + \frac{4}{\beta^5} + \frac{5}{\beta^6} + \frac{6}{\beta^7} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \sum_{n\geq 3} \frac{n}{\beta^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \sum_{n\geq 1} \frac{n+2}{\beta^{n+3}}$$

$$= \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^3}\sum_{n\geq 1} \frac{n+2}{\beta^n}$$

$$= \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^3}(\sum_{n\geq 1} \frac{n}{\beta^n} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\beta^n})$$

$$= \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^3}\frac{\beta}{(\beta - 1)^2} + \frac{1}{\beta^3}\frac{2}{\beta - 1}$$

$$= \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{\beta}{\beta^3(\beta-1)^2} + \frac{2(\beta-1)}{\beta^3(\beta-1)^2}$$

$$\frac{1}{(\beta-1)^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{3\beta-2}{\beta^3(\beta-1)^2}$$

Posons $\beta = x^2$

$$\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^6} + \frac{3x^2-2}{x^6(x^2-1)^2}$$

Multiplions l'équation obtenue par x de part et d'autre :

$$\frac{x}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^5} + \frac{3x^2-2}{x^5(x^2-1)^2}$$

Ce qui équivaut à

$$\boxed{\frac{1}{x^3} = \frac{x}{(x^2-1)^2} - \frac{3x^2-2}{x^5(x^2-1)^2} - \frac{2}{x^5}}$$

Rappelons que :

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \cdots$$

$$\zeta(3) = 1 + \sum_{x\geq 2} \frac{1}{x^3} \qquad \text{Ce qui équivaut à} \quad \sum_{x\geq 2} \frac{1}{x^3} = \zeta(3) - 1$$

En remplaçant $\frac{1}{x^3}$ par son expression qui est encadré, on a :

$$\sum_{x\geq 2} \left(\frac{x}{(x^2-1)^2} - \frac{3x^2-2}{x^5(x^2-1)^2} - \frac{2}{x^5}\right) = \zeta(3) - 1$$

$$\sum_{x\geq 2} \frac{x}{(x^2-1)^2} - \sum_{x\geq 2} \frac{3x^2-2}{x^5(x^2-1)^2} - 2\sum_{x\geq 2} \frac{1}{x^5} = \zeta(3) - 1$$

$$\sum_{x\geq 2} \frac{x}{(x^2-1)^2} - \sum_{x\geq 2} \frac{3x^2-2}{x^5(x^2-1)^2} - 2(\zeta(5) - 1) = \zeta(3) - 1$$

$$\sum_{x\geq 2} \frac{x}{(x^2-1)^2} - \sum_{x\geq 2} \frac{3x^2-2}{x^5(x^2-1)^2} + 3 = 2\zeta(5) + \zeta(3)$$

$$2\zeta(5) + \zeta(3) = 3 + \sum_{x\geq 2} \frac{x}{(x^2-1)^2} - \sum_{x\geq 2} \frac{3x^2-2}{x^5(x^2-1)^2}$$

Or

$$\sum_{x\geq 2}\frac{x}{(x^2-1)^2}=\sum_{x\geq 2}\left(\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{1}{4(x+1)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{x\geq 2}\frac{1}{(x-1)^2}-\sum_{x\geq 2}\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\zeta(2)-(\zeta(2)-1-\frac{1}{2^2})\right)$$

$$\sum_{x\geq 2}\frac{x}{(x^2-1)^2}=\frac{5}{16}$$

Ainsi

$$2\zeta(5)+\zeta(3)=3+\frac{5}{16}-\sum_{x\geq 2}\frac{3x^2-2}{x^5(x^2-1)^2}$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{2\zeta(5)+\zeta(3)=\frac{53}{16}-\sum_{x\geq 2}\frac{3x^2-2}{x^5(x^2-1)^2}}$$

Ainsi il existe bel et bien une relation entre ζ(3) et ζ(5).

Vérifions numériquement la valeur de ζ(3) et ζ(5) par cette expression :

$$\zeta(3)=\frac{53}{16}-\sum_{x\geq 2}\frac{3x^2-2}{x^5(x^2-1)^2}-2\zeta(5)=1{,}2020569032\ldots$$

$ce\ qui\ correspond\ bien\ à\ la\ valeur\ numérique\ de\ \zeta(3). Pareillement\ pour\ \zeta(5), on\ a$:

$$\zeta(5)=\frac{53}{32}-\frac{1}{2}\sum_{x\geq 2}\frac{3x^2-2}{x^5(x^2-1)^2}-\frac{1}{2}\zeta(3)=1{,}036927757\ldots$$

$cette\ valeur\ correspond\ effectivement\ à\ la\ valeur\ numerique\ de\ \zeta(5).$

En faisant les sommes de chaque partie, on a :

$$2\zeta(5)+\zeta(3)=3{,}2759124134\ldots$$

$$\frac{53}{16}-\sum_{x\geq 2}\frac{3x^2-2}{x^5(x^2-1)^2}=3{,}2759124134\ldots$$

Les deux valeurs numériques sont identiques donc l'égalité est exacte.

on obtient donc une expression reliant à la fois $\boldsymbol{\zeta(3)},\boldsymbol{\zeta(5)}$ et une constante d'Amon $\text{Ă}\boldsymbol{m}$.

$$2\zeta(5)+\zeta(3)=\frac{53}{16}-\text{Ă}\boldsymbol{m}\qquad avec\qquad \text{Ă}\boldsymbol{m}=\sum_{x\geq 2}\frac{3x^2-2}{x^5(x^2-1)^2}$$

<u>Vérifions que la constante d'Amon Ăm converge</u>

$Consdérons\ notre\ série\ \sum U_n\ \ de\ \ terme\ général\ donné\ par$:

$$U_n = \frac{3n^2-2}{n^5(n^2-1)^2} = \frac{3n^2-2}{n^9-2n^7+n^5}$$

$lorsque\ n \to +\infty \quad on\ a \quad U_n \sim \frac{3n^2}{n^9} = \frac{3}{n^7}$

$La\ série\ de\ terme\ général\ U_n\ a\ le\ même\ comportement\ (convergence\ ou\ divergence)$

$que\ la\ série\ de\ terme\ général\ v_n = \frac{3}{n^7}$.

$La\ série\ \sum v_n = 3\sum \frac{1}{n^7}\ est\ une\ série\ de\ Riemann\ de\ la\ forme$

$\sum \frac{1}{n^\alpha}\ \ avec\ \ \alpha = 7$

Or la série de Riemann converge si et seulement si α>1.

Puisque α = 7 >1, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^7}$ converge.

Par conséquent, par critère d'équivalence, la série originale$\sum_{n\geq 2} U_n$

converge.

On en conclut que la constante d'Amon converge vers une valeur finie que nous nommerons ***r.***

$$\text{Ă}\boldsymbol{m} = \sum_{x\geq 2} \frac{3x^2-2}{x^5(x^2-1)^2} = r$$

Cette valeur ***r*** peut être rationnelle ou irrationnelle influençant immédiatement la constante d'Amon Am.

Donc deux cas se présentent à nous :

- $Pour\ \ r_{(rationnel)} \qquad \to \qquad \text{Ă}\boldsymbol{m}_{(rationnel)}$
- $Pour\ \ r_{(irrationnel)} \qquad \to \qquad \text{Ă}\boldsymbol{m}_{(irrationnel)}$

III. DEMONSTRATION DE L'IRRATIONALITE DE ζ(5)

Démontrons maintenant que $\zeta(5)$ est irrationnel

Revenons maintenant à notre expression reliant $\zeta(5)$ et $\zeta(3)$.

$$2\zeta(5)+\zeta(3)=\frac{53}{16}-\breve{A}\boldsymbol{m}$$

On a vu que la constante d'Amon $\breve{A}\boldsymbol{m}$ peut-être rationnelle ou irrationnelle suivant la rationalité ou l'irrationalité de sa valeur $\boldsymbol{r}$.

Dans notre expression reliant $\zeta(5)$ et $\zeta(3)$:

$$Posons\ q=\frac{53}{16}-\breve{A}\boldsymbol{m} \qquad tel\ que \quad 2\zeta(5)+\zeta(3)=q$$

$$q\ est\ la\ différence\ de\ deux\ nombres\!:\ \frac{53}{16}\ qui\ est\ rationnel\ et\ la\ constante$$

$$d'Amon\ \breve{A}\boldsymbol{m}\ qui\ peut-être\ rationnelle\ ou\ irrationnelle\ suivant\ r.$$

Par conséquent, la rationalité ou l'irrationalité de q dépendra de la constante d'Amon $\breve{A}\boldsymbol{m}$, qui elle-même dépend de sa valeur $\boldsymbol{r}$ tel que :

$$-Si\ \ r_{(rationnel)} \quad\rightarrow\quad \breve{A}\boldsymbol{m}_{(rationnel)} \quad\rightarrow\quad q_{(rationnel)}$$

Propriété Arithmétique 1: *rationnel ± rationnel = toujours rationnel*

Démonstration :

$$supposons\ que\ \ r_{(rationnel)}=4 \quad\rightarrow\quad \breve{A}\boldsymbol{m}_{(rationnel)}=4$$

$$Ce\ qui\ équivaut\ à\ q=\frac{53}{16}-4=\frac{-11}{16} \quad donc\ q\ est\ rationnel$$

$$-Si\ \ r_{(irrationnel)} \quad\rightarrow\quad \breve{A}\boldsymbol{m}_{(irrationnel)} \quad\rightarrow\quad q_{(irrationnel)}$$

Propriété Arithmétique 2: *rationnel ± irrationnel = toujours irrationnel*

Démonstration :

$$supposons\ que\ \ r_{(irrationnel)}=\frac{3\pi}{7} \quad\rightarrow\quad \breve{A}\boldsymbol{m}_{(irrationnel)}=\frac{3\pi}{7}$$

$$Ce\ qui\ équivaut\ à\ q=\frac{53}{16}-\frac{3\pi}{7}=\frac{371-48\pi}{112} \quad donc\ q\ est\ irrationnel$$

Donc :

- $Pour\ \ r_{(rationnel)} \quad\rightarrow\quad \breve{A}\boldsymbol{m}_{(rationnel)} \quad\rightarrow\quad q_{(rationnel)}$
- $Pour\ \ r_{(irrationnel)} \quad\rightarrow\quad \breve{A}\boldsymbol{m}_{(irrationnel)} \quad\rightarrow\quad q_{(irrationnel)}$

En résumé, il faudra prendre en compte les deux options pour la valeur q.

q peut –être rationnel $q_{(rationnel)}$

q peut –être irrationnel $q_{(irrationnel)}$

Dans notre expression reliant $\zeta(5)$ et $\zeta(3)$, nous savons déjà que $\zeta(3)$ est irrationnel. Apéry l'a déjà démontré. Donc tout l'enjeu se trouve au niveau de q. La rationalité ou l'irrationalité de $\zeta(5)$ va donc dépendre de q.

Donc voici le plus gros travail à faire :

On a :

$$2\zeta(5) + \zeta(3) = q \quad \textit{ce qui implique que} \quad \zeta(5) = \frac{1}{2}\big(q - \zeta(3)\big)$$

$\zeta(5)$ est la différence de deux nombres : q qui peut être rationnel ou irrationnel et $\zeta(3)$ qui est irrationnel.

Mais si on arrive à démontrer que quel que soit la rationalité ou l'irrationalité de q, la différence $q - \zeta(3)$ est irrationnelle alors, on aura donc prouver en même temps que $\zeta(5)$ est irrationnel.

Allons-y :

❖ ***1er cas : pour $q_{(rationnel)}$***

• $Pour\ r_{(rationnel)} \quad \rightarrow \quad \breve{A}\boldsymbol{m}_{(rationnel)} \quad \rightarrow \quad q_{(rationnel)}$

$Ainsi\ \ \zeta(5) = \frac{1}{2}\left(q_{(rationnel)} - \zeta(3)\right)$

Avec q étant rationnel et $\zeta(3)$ étant irrationnel,

On a :

Propriété Arithmétique 2 : *rationnel ± irrationnel = toujours irrationnel*

Donc $\zeta(5)$ est irrationnel

❖ ***2eme cas : pour $q_{(irrationnel)}$***

• $Pour\ r_{(irrationnel)} \quad \rightarrow \quad \breve{A}\boldsymbol{m}_{(irrationnel)} \quad \rightarrow \quad q_{(irrationnel)}$

$Ainsi\ \ \zeta(5) = \frac{1}{2}\left(q_{(irrationnel)} - \zeta(3)\right)$

Avec q étant irrationnel et $\zeta(3)$ étant irrationnel,

On a :

Propriété Arithmétique 3 : *irrationnel ± irrationnel = peut-être rationnel ou irrationnel*

Ce qui nous ramène à deux cas : $\zeta(5)=\frac{1}{2}\left(q_{(irrationnel)}-\zeta(3)\right)$ *peut-être rationnel ou irrationnel.*

On peut représenter ces cas de cette manière :

$$\zeta(5)=\frac{1}{2}\left(q_{(irrationnel)}-\zeta(3)\right)\rightarrow\left(\begin{matrix}soit\ rationnel\\ soit\ irrationnel\end{matrix}\right)$$

Démontrons par l'absurde que $\boldsymbol{q_{(irrationnel)}-\zeta(3)}$ ***est irrationnel***

Supposons que $q_{(irrationnel)}-\zeta(3)$ *est rationnel*

On peut donc écrire que :

$q_{(irrationnel)}-\zeta(3)=\frac{a}{b}$ *ainsi,*

$$\left(q_{(irrationnel)}-\zeta(3)\right)^2=\frac{a^2}{b^2}$$

$$\left(q_{(irrationnel)}\right)^2+\left(\zeta(3)\right)^2-2q_{(irrationnel)}.\zeta(3)=\frac{a^2}{b^2}$$

$$2q_{(irrationnel)}.\zeta(3)=\left(q_{(irrationnel)}\right)^2+\left(\zeta(3)\right)^2-\frac{a^2}{b^2}$$

$$q_{(irrationnel)}.\zeta(3)=\frac{\left(q_{(irrationnel)}\right)^2+\left(\zeta(3)\right)^2-\frac{a^2}{b^2}}{2}$$

$$q_{(irrationnel)}.\zeta(3)=\frac{\left(q_{(irrationnel)}\right)^2+\left(\zeta(3)\right)^2}{2}-\frac{a^2}{2b^2}$$

Or

$$\left(q_{(irrationnel)}+\zeta(3)\right)^2=\left(q_{(irrationnel)}\right)^2+\left(\zeta(3)\right)^2+2q_{(irrationnel)}.\zeta(3)$$

$$\left(q_{(irrationnel)}\right)^2+\left(\zeta(3)\right)^2=\left(q_{(irrationnel)}+\zeta(3)\right)^2-2q_{(irrationnel)}.\zeta(3)$$

Donc

$$q_{(irrationnel)}.\zeta(3)=\frac{\left(q_{(irrationnel)}+\zeta(3)\right)^2-2q_{(irrationnel)}.\zeta(3)}{2}-\frac{a^2}{2b^2}$$

$$q_{(irrationnel)}.\zeta(3)=\frac{\left(q_{(irrationnel)}+\zeta(3)\right)^2}{2}-q_{(irrationnel)}.\zeta(3)-\frac{a^2}{2b^2}$$

$$2q_{(irrationnel)}.\zeta(3) = \frac{\left(q_{(irrationnel)} + \zeta(3)\right)^2}{2} - \frac{a^2}{2b^2}$$

$$q_{(irrationnel)}.\zeta(3) = \frac{\left(q_{(irrationnel)} + \zeta(3)\right)^2}{4} - \frac{a^2}{4b^2}$$

Or pour $q_{(irrationnel)} - \zeta(3)$ *qui est rationnel,* $q_{(irrationnel)} + \zeta(3)$ *qui est forcément irrationnel. Nous l'avons déjà démontré dans première partie.*

NB : soient a et b deux nombres irrationnels.
*Si **a-b** est rationel alors **a+b** est forcément irrationnel.*

Et puisque $q_{(irrationnel)} = \frac{53}{16} - r_{(irrationnel)} \neq \zeta(3)$, *par conséquent* $\left(q_{(irrationnel)} + \zeta(3)\right)^2$ *est irrationnel.*

- $\left(q_{(irrationnel)} + \zeta(3)\right)^2$ *est irrationnel.*

Donc

- $q_{(irrationnel)}.\zeta(3) = \frac{\left(q_{(irrationnel)}+\zeta(3)\right)^2}{4} - \frac{a^2}{4b^2}$ *est irrationnel*

Qui entraine que

- $\left(q_{(irrationnel)} - \zeta(3)\right)^2$ *est irrationnel*

Par conséquent

- $q_{(irrationnel)} - \zeta(3)$ *est irrationnel ce qui est contraire à la l'hypothèse énoncé au départ «* $q_{(irrationnel)} - \zeta(3)$ *est rationnel »*

Donc l'hypothèse est fausse.

On en conclut ainsi que $q_{(irrationnel)} - \zeta(3)$ *est irrationnel*

Donc $\boldsymbol{\zeta(5)}$ ***est irrationnel***

En résumé on obtient que :

- *Pour* $\boldsymbol{q_{(rationnel)}}$ → ***Donc*** $\boldsymbol{\zeta(5)}$ ***est irrationnel***
- *Pour* $\boldsymbol{q_{(irrationnel)}}$ → ***Donc*** $\boldsymbol{\zeta(5)}$ ***est irrationnel***

On arrive à démontrer que quel que soit la rationalité ou l'irrationalité de q, la différence $q - \zeta(3)$ *est irrationnelle alors, on a donc prouver que* $\boldsymbol{\zeta(5)}$ ***est irrationnel.***

Pour toutes remarques, commentaires ou critiques, vous pourrez me contacter par mon Email : amonahoulou@gmail.com ***ou par mon*** Contact WhatsApp : (+225) 0789 854 366