Chapitre II

Les principes de la mécanique quantique

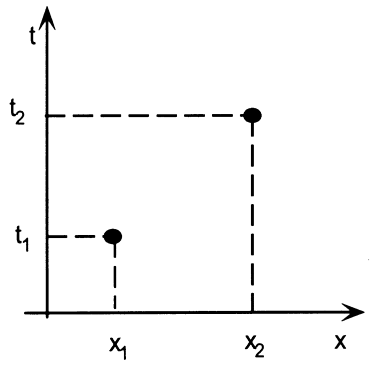
Puisque la physique classique est totalement inadéquate pour décrire les phénomènes observés à l'échelle atomique, il est nécessaire d'élaborer *un nouveau cadre conceptuel* de la physique. Cette nouvelle théorie de l'univers physique est conventionnellement appelée la "mécanique quantique". Dans ses grandes lignes elle a été conçue entre 1925 et 1930 et elle est l'oeuvre, principalement, de N. Bohr, W. Heisenberg, E. Schrödinger et P.A.M. Dirac.

La mécanique quantique est une révolution scientifique majeure qui modifie radicalement un certain nombre de concepts de base de la physique. Inventée pour les "besoins de la cause" c'est-à-dire pour expliquer les faits expérimentaux à l'échelle atomique, la mécanique quantique a été maintes fois testée et ses prédictions sont expérimentalement vérifiées à un niveau de précision absolument extraordinaire et ce jusqu'aux échelles actuellement atteintes dans l'exploration de la structure de la matière à savoir $10^{-19} - 10^{-20}$ cm !

I Enoncé des principes

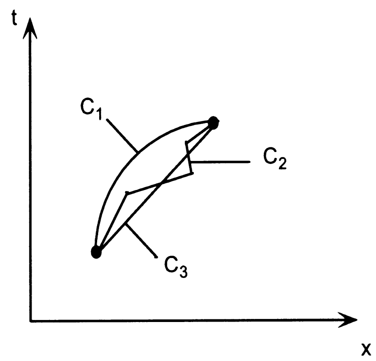
Le but de ce chapitre est d'énoncer le plus clairement possible les principes de base de la mécanique quantique. Ces principes sont extrêmement simples mais relativement abstraits et surprenants à plus d'un titre.

Pour la facilité de l'exposé, considérons le cas d'une particule non relativiste de masse m qui, au cours du temps (t) se meut dans un espace unidimensionnel (x). Plus précisément, considérons la situation où cette particule se trouve au point x_1 à l'instant t_1 et au point x_2 à l'instant t_2



A priori, il y a une multitude de *chemins* possibles pour aller de (x_1, t_1) à (x_2, t_2). Par "chemin", nous entendons une courbe quelconque $x_c(t)$ qui part du point x_1 à l'instant t_1 et aboutit au point x_2 à l'instant t_2 i.e.

$$x_c(t_1) = x_1 \qquad x_c(t_2) = x_2$$



Un des concepts de base de la mécanique classique est celui de *trajectoire*. Par définition, la trajectoire $x_T(t)$ d'une particule classique est <u>le</u> chemin particulier (unique) que cette particule va effectivement parcourir pour aller de (x_1, t_1) à (x_2, t_2). Cette trajectoire est déterminée par le *principe de moindre action*. Pour une particule non relativiste dans un potentiel $V(x)$, l'action S est définie par

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{m\Big(\dot{x}(t)\Big)^2}{2} - V\Big(x(t)\Big) \right\}.$$

Cette action S est une fonctionnelle du chemin $x_c(t)$ i.e.

$$S \equiv S\Big(x_c(t)\Big) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{m\Big(\dot{x}_c(t)\Big)^2}{2} - V\Big(x_c(t)\Big) \right\}.$$

(Si on se donne un chemin $x_c(t)$, on peut calculer le nombre correspondant $S\Big(x_c(t)\Big)$. Le principe de moindre action est l'assertion que

$$S\Big(x_T(t)\Big) \quad < \quad S\Big(x_c(t)\Big) \quad \text{(pour tout } x_c(t) \neq x_T(t))$$

c'est-à-dire que la trajectoire $x_T(t)$ est le chemin pour lequel l'action est la plus petite possible. [voir figure ci-dessous].

Remarques

1) L'action et une grandeur dimensionnelle $[S] = [ML^2T^{-1}]$. Elle est définie pour tous les chemins $x_c(t)$, mais, en fin de compte, seul $S(x_T(t))$ est "physiquement relevant".

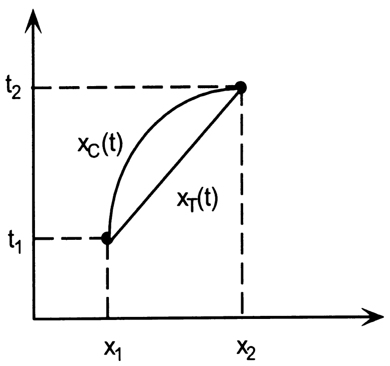
2) Pour déterminer concrètement $x_T(t)$, on ne calcule évidemment pas $S(x_c(t))$ pour tous les chemins possibles (ce serait un peu long !).

Le "calcul des variations" permet de passer du principe de moindre action à l'équation d'Euler-Lagrange

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \text{ soit encore, dans le cas considéré, } m\ddot{x}(t) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

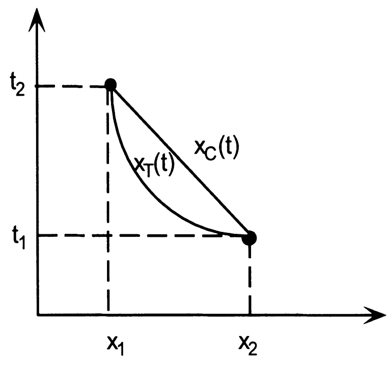
et $x_T(t)$ est la solution unique de cette équation différentielle avec $x_T(t_1) = x_1$ et $x_T(t_2) = x_2$.

Par exemple pour une particule libre



$S(x_T) < S(x_c)$

ou pour une particule dans un potentiel linéaire $V = -mg\,x$



$S(x_T) < S(x_c)$

Après ce rappel des "règles du jeu" de la mécanique classique, nous pouvons à présent énoncer celles de la mécanique quantique.

1.1 Assertion préliminaire

$\boxed{\text{La mécanique quantique est une théorie } \textit{intrinsèquement probabiliste}}$

Il ne sera plus question de trajectoire entre les points (x_1, t_1) et (x_2, t_2) mais bien de la probabilité de trouver la particule au point x_2 à l'instant t_2 sachant qu'à l'instant t_1 elle se trouvait au point x_1.

Commentaires

1) La notion de probabilité est la même qu'en physique classique (p.ex. jet de dés).

2) Dire que la théorie quantique est probabiliste implique qu'une même expérience effectuée dans les mêmes conditions peut donner des résultats différents !

3) "Intrinsèquement probabiliste" veut dire que l'indéterminisme ou le manque de certitude inhérent à une théorie probabiliste ne vient pas de la difficulté ou de l'impossibilité pratique de déterminer les conditions initiales précises du problème (p.ex. jet de dés) mais que cet indéterminisme est pour ainsi dire une loi de la nature. En d'autres mots : c'est comme cela !

   Si le monde quantique est effectivement "comme cela" (intrinsèquement probabiliste), il est inéluctable que la notion de *trajectoire précise* perde son sens. Nous reviendrons sur ce commentaire ultérieurement.

4) Si on abandonne la notion de trajectoire précise, peut-on encore parler, par exemple, d'une particule qui arrive au point x_2 à l'instant t_2? La réponse est oui. Une manière "pratique" d'illustrer cette réponse est de placer un détecteur au point x_2. A l'instant t_2 où ce détecteur se déclenche, il n'y a pas de doute ni de probabilité mais la certitude que la particule est au point x_2.

1.2 Structure conceptuelle et règles du jeu de la mécanique quantique

Si la notion de probabilité est la même en mécanique quantique qu'en physique classique, le calcul de cette probabilité est radicalement différent. En mécanique quantique, le concept de base est celui d'*amplitude de probabilité*. Nous noterons

$$A(x_2, t_2; x_1, t_1) \tag{2.1}$$

l'amplitude de probabilité de trouver la particule au point x_2 à l'instant t_2 sachant qu'elle était au point x_1 à l'instant t_1. L'amplitude de probabilité est un nombre complexe et la probabilité correspondante est donnée par le module au carré de ce nombre complexe. Les règles du jeu sont les suivantes :

(I) Pour un chemin donné, $x_c(t)$, l'amplitude de probabilité $A_c(x_2, t_2; x_1, t_1)$ est donnée par

$$\boxed{A_c(x_2, t_2; x_1, t_1) = \exp\ i\ \frac{S[x_c(t)]}{\hbar}} \tag{2.1}$$

où $S(x_c(t))$ est la valeur de l'action pour le chemin $x_c(t)$ et $\hbar$ est la constante de Planck divisée par 2π.

(II) Principe de superposition linéaire

$$\boxed{\begin{array}{rcl} A(x_2,t_2;x_1,t_1) & = & \sum_c A_c(x_2,t_2;x_1,t_1) \\ & = & \sum_c e^{iS(x_c(t))/\hbar} \end{array}} \tag{2.2}$$

où $\sum_c$ est la "somme" sur tous les chemins allant de x_1 à x_2.

(III) La probabilité (relative) de trouver la particule au point (x_2,t_2) sachant qu'elle était au point (x_1,t_1) est donnée par

$$\boxed{P(x_2,t_2;x_1,t_1) = |A(x_2,t_2;x_1,t_1)|^2} \tag{2.3}$$

Par probabilité relative on entend une probabilité non-normalisée. Par exemple si l'évènement A est 5 fois plus probable que l'évènement B on peut dire que la probabilité relative de A est 5 et celle de B est 1.

Précisons quelque peu la règle (2.3) en ajoutant que la probabilité de trouver la particule au point x_2 ou au point x_3, à l'instant t_2 est donnée par

$$\boxed{P(x_2 \text{ ou } x_3,t_2;x_1,t_1) = P(x_2,t_2;x_1,t_1) + P(x_3,t_2;x_1,t_1)} \tag{2.4}$$

Quelques remarques encore, avant d'illustrer concrètement ces règles :

(1) La probabilité (relative) de parcourir un chemin donné C est donnée par

$$P_c = |A_c(x_2,t_2;x_1,t_1)|^2 = 1.$$

Elle est indépendante du chemin et par conséquent *tous les chemins sont équiprobables*, ce qui est encore une manière d'exprimer le fait que la notion de trajectoire n'a plus vraiment de sens en mécanique quantique.

Par ailleurs, l'action est *omniprésente* en mécanique quantique. C'est la raison pour laquelle $\hbar$ apparaît dans toutes les formules ou expressions quantiques. Dans le cas qui nous concerne ici l'action est une fonctionnelle du chemin parcouru, $S\Big(x_c(t)\Big)$ est un nombre qui dépend de la fonction $x_c(t)$. Mais tandis qu'en mécanique classique seule $S\Big(x_T(t)\Big)$, à savoir la valeur spécifique de l'action pour la trajectoire, a un contenu physique, en mécanique quantique *toutes les valeurs* $S\Big(x_c(t)\Big)$ pour tous les chemins possibles sont *significatives* : elles déterminent *les phases des amplitudes de probabilité* $A_c(x_2,t_2;x_1,t_1)$.

(2) La règle (II) est absolument fondamentale dans toute la physique quantique. Elle affirme que lorsqu'il y a plusieurs alternatives pour un processus physique, l'amplitude de probabilité du processus est la somme des amplitudes de chacune des alternatives. Ceci est radicalement différent de la règle (2.4) où on additionne les probabilités pour des processus distincts !

Pour préciser les règles — quand faut-il additionner les amplitudes et quand additionne-t-on les probabilités — il est nécessaire de distinguer deux types d'alternatives et cette distinction est liée aux deux significations de la conjonction "ou" :

∗ La première signification implique une notion d'exclusion et les alternatives correspondantes sont appelées *alternatives exclusives.*

Exemples :

- sémantique : ici ou là-bas

- physique quantique : particule *détectée* au point x_2 ou au point x_3 à un instant donné.

Pour des alternatives exclusives, ce sont les probabilités qu'on additionne. Ceci est la règle habituelle du calcul des probabilités, par exemple : la probabilité d'obtenir un "as" ou un "six" dans un jet de dés est $\frac{1}{3}$.

∗ La deuxième signification de la conjonction ou implique une notion de combinaison ou d'interférence et les alternatives correspondantes sont appelées *alternatives interférentes. Pour des alternatives interférentes ce sont les amplitudes qu'on additionne* et non plus les probabilités.

Exemples :

- sémantique : avant le lever du soleil ou après son coucher, il fait nuit.

- physique quantique : dans le processus physique *complètement défini* par

$$\left\{\begin{array}{l}\text{particule au point } x_1 \text{ à l'instant } t_1\\ \text{et particule au point } x_2 \text{ à l'instant } t_2\end{array}\right\} \text{ les différents chemins pour aller de}$$

x_1 à x_2 sont des alternatives interférentes. Nous avons ajouté la restriction "processus physique complètement défini par ... " en anticipant un fait capital de la physique quantique à savoir *le rôle de "l'observation"*. Nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

(3) Dans la règle (II) nous utilisons l'expression "somme sur tous les chemins allant de x_1 à x_2". Cette "somme" correspond à la notion mathématique "d'intégrale fonctionnelle". Nous n'utiliserons pas cet outil mathématique dans la suite de ce cours, mais

intuitivement, on peut définir cette "somme" comme suit :

divisons l'intervalle de temps $t_1 - t_2$ en N intervalles égaux, ε,

$$t_2 - t_1 = N\varepsilon$$

tout chemin de x_1 à x_2 peut alors être approximé par les positions

$$\begin{array}{rll} & x_1 & \text{au temps } t_1 \\ & y_1 & \text{au temps } t_1+\varepsilon \\ & y_2 & \text{au temps } t_1+2\varepsilon \\ & \vdots & \\ & y_{N-1} & \text{au temps } t_1+(N-1)\varepsilon \\ \text{et enfin} & x_2 & \text{au temps } t_2 = t_1+N\varepsilon. \end{array}$$

La "somme sur tous les chemins" est alors approximée par une intégrale multiple (ordinaire) sur les variables $y_1, \dots, y_{N-1}$. Il ne reste plus qu'à passer à la limite $\varepsilon \to 0, N \to \infty, \varepsilon N = t_2 - t_1 \quad \dots$.

(4) A partir des règles (I) et (II), il n'est pas difficile de dériver une règle importante pour la composition d'amplitudes correspondant à des processus qui se succèdent dans le temps. Pour alléger la notation convenons de noter par $a \equiv (x_a, t_a) \quad b \equiv (x_b, t_b) \quad d \equiv (x_d, t_d)$. Alors

$$\boxed{A(b,a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_d \;\; A(b,d) \;\; A(d,a)} \tag{2.5}$$

c'est-à-dire que l'amplitude de probabilité pour aller de a à b est la somme (intégrale) sur toutes les positions x_d (à un temps t_d) du produit de l'amplitude pour aller de a à d et de l'amplitude pour aller de d à b.

Pour dériver cette formule notons tout d'abord qu'un chemin donné C qui va de x_a à x_b en passant par x_d définit un chemin donné C_1 qui va de x_a à x_d <u>et</u> un chemin donné C_2 qui va de x_d à x_b. Comme $S_C(b,a) = S_{C_2}(b,d) + S_{C_1}(d,a)$, nous avons

$$A_C(b,a) = A_{C_2}(b,d) A_{C_1}(d,a)$$

et comme "$\sum_C = \int dx_d \sum_{C_2} \sum_{C_1}$" la formule (2.5) est démontrée.

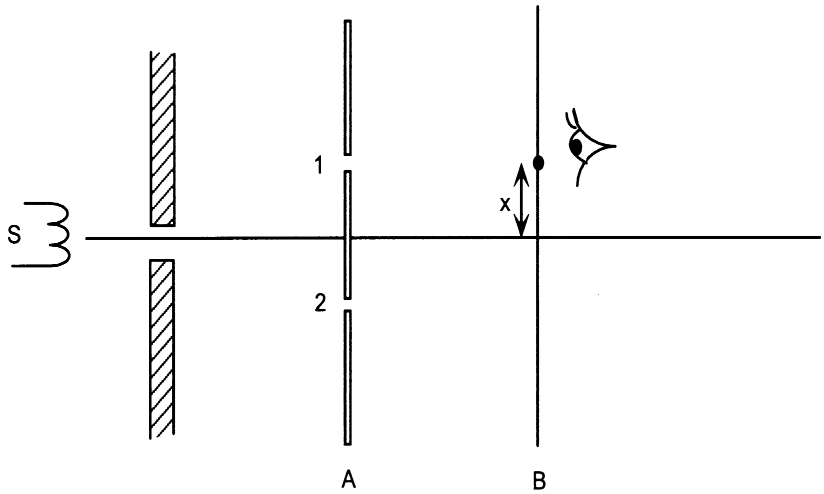
"$\sum_C = \int dx_d \sum_{C_2} \sum_{C_1}$" signifie qu'on peut sommer sur tous les chemins C de x_a et x_b en sommant d'abord sur tous les chemins C_1 qui vont de x_a à un point intermédiaire x_d et sur tous les chemins C_2 qui vont du même point intermédiaire x_d à x_b et enfin sur toutes les valeurs de x_d

II L'expérience à deux trous

Remarque préliminaire : l'expérience que nous allons décrire a effectivement été faite[1]. Comme notre but, à ce stade de l'exposé, est d'illustrer les règles du jeu de la physique quantique nous avons considérablement idéalisé la situation expérimentale et l'analyse théorique reste très qualitative.

2.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est schématisé ci-dessous



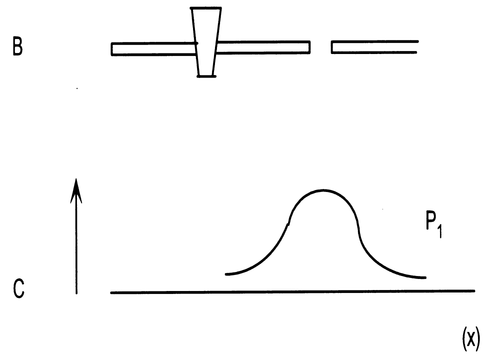
En A nous avons un faisceau collimaté d'électrons provenant d'une source S. L'écran B est percé de deux trous (1 et 2) et les électrons arrivent finalement sur l'écran C qui est "couvert" de détecteurs (compteurs Geiger). Ce qui est mesuré est le nombre d'électrons arrivant à la distance x de la ligne du faisceau et ceci pour diverses valeurs de x. L'expérience nous donne donc directement la probabilité (relative) pour des électrons issus du collimateur A d'arriver au point x de l'écran C.

2.2 Résumé des principaux résultats

1. Les électrons sont bien des particules (de masse et de charge bien déterminées) : en jouant sur l'intensité de la source S on peut faire arriver les électrons "un à un" en un seul des détecteurs de l'écran C.

[1] C. Jonsson, Z. Phys. 161 (1961) 454.

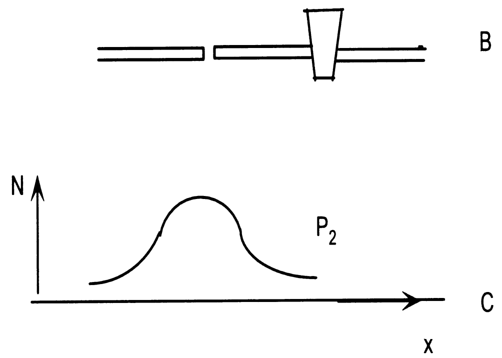
2. Lorsque le trou 2 est fermé, la courbe de distribution des électrons est esquissée ci-dessous (nous avons “renversé” les écrans B et C pour la facilité).



(a)

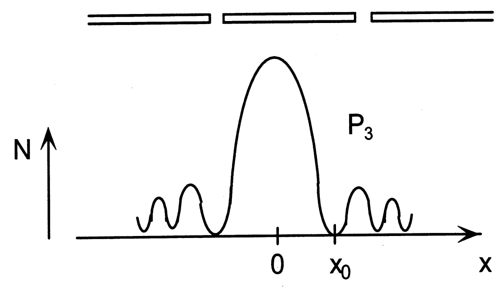
La courbe P_1 est obtenue par lissage du nombre N d'électrons enregistrés dans les compteurs Geiger situés à la distance x de la ligne du faisceau (0).

3. Lorsque c'est le trou 1 qui est fermé, la distribution est donnée par une courbe symétrique à savoir

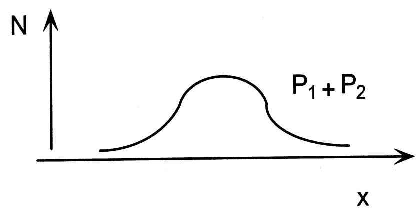


(b)

4. Lorsque les deux trous sont ouverts



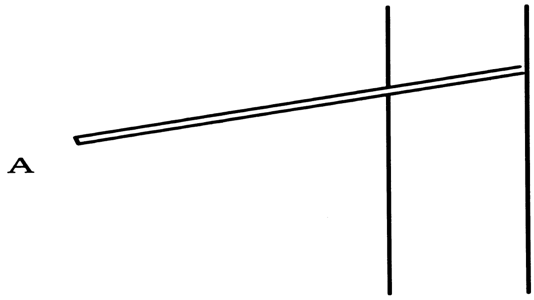
(c)



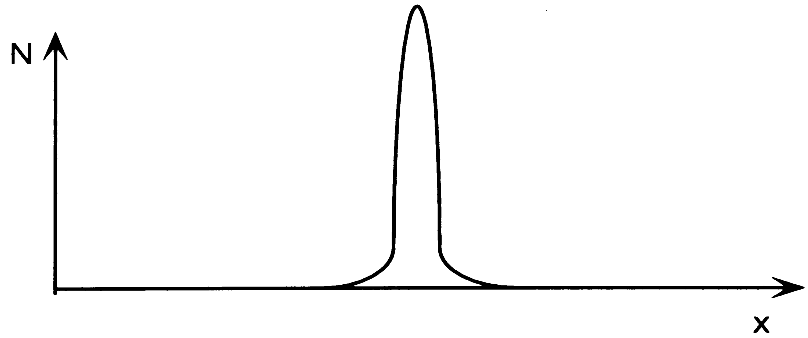
(d)

Les résultats de cette expérience sont étonnants et classiquement inexplicables !!

La courbe P_1 (ou P_2) est une courbe obtenue en comptant le nombre d'électrons qui arrivent dans un détecteur de l'écran C. Les électrons arrivent un à un sur cet écran mais à des endroits très distants les uns des autres. Pour un faisceau de particules classiques :



et la courbe P_1 aurait la forme



et cette forme est *incompatible* avec le résultat observé.

Le fait expérimental $P_3 \neq P_1 + P_2$ est encore plus surprenant. De plus, en $x = 0$ par exemple $P_3 > P_1 + P_2$ tandis qu'en $x = x_0$ $P_3 < P_1 + P_2$: il y a donc moins d'électrons qui arrivent en $x = x_0$ lorsque les deux trous sont ouverts que lorsqu'un seul de ceux-ci l'est !?!

2.3 Illustration qualitative des règles de la physique quantique dans l'expérience à 2 trous

En vertu de la formule (2.5), pour aller du collimateur A au point x sur l'écran C il n'y a que deux amplitudes de probabilité à considérer, soit :
- $A_1(x)$ = (ampl. pour aller de A au trou 1) $\times$ (amplitude pour aller de 1 au point x);
- $A_2(x)$ = (ampl. pour aller de A au trou 2) $\times$ (amplitude pour aller de 2 au point x)

Lorsque le trou 2 est fermé, l'électron qui arrive en x doit être passé par le trou 1 et donc

$$P_1(x) = |A_1(x)|^2.$$

De même

$$P_2(x) = |A_2(x)|^2.$$

Par contre lorsque les deux trous sont ouverts

$$P_3(x) = |A_1(x) + A_2(x)|^2 \quad \neq \quad P_1(x) + P_2(x).$$

Enfin, il n'est pas difficile d'imaginer des situations pour lesquelles $P_3 > P_1 + P_2$ ou $P_3 < P_1 + P_2$.

Ainsi pour $x = 0$, la symétrie du problème suggère que $A_1(0) = A_2(0)$ et dès lors

$$P_3(0) = |A_1(0) + A_2(0)|^2 = 4P_1(0) > P_1(0) + P_2(0) = 2P_1(0).$$

De même en $x = x_0$, si $A_2(x_0) = e^{i\pi} A_1(x_0) = -A_1(x_0)$. Nous aurons bien

$$P_3(x_0) = 0 \qquad !$$

Le point essentiel de cette analyse qualitative est que l'expérience à 2 trous, *dans les conditions précises où elle a été définie* (à savoir faisceau d'électrons en A et enregistrement des données en C), est une confirmation expérimentale de l'assertion que le passage de l'électron par le trou 1 et le passage de l'électron par le trou 2 sont des *alternatives interférentes.* Mais nous pouvons maintenant pousser un peu plus loin notre analyse de la signification physique de cette assertion en essayant de déterminer *expérimentalement* par quel trou (1 ou 2) l'électron passe ...

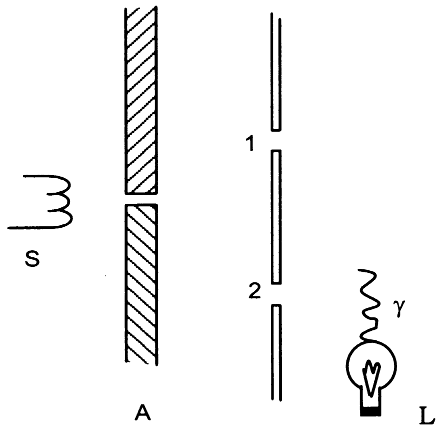
III Modification du dispositif expérimental : effet de l'observation

Commençons par préciser que par le mot “observation” nous entendons l'ensemble du dispositif expérimental qui définit les conditions dans lesquelles une expérience est effectuée.

$P_3(x) \neq P_1(x) + P_2(x)$ est un *fait expérimental* incontournable. Logiquement nous devons en conclure que lorsque les deux trous sont ouverts il n'est tout simplement pas vrai que l'électron passe par un trou ou (exclusif) par l'autre !!

Il n'est pas difficile d'imaginer une expérience qui teste directement cette conclusion étonnante.

Nous pouvons, par exemple, installer une source lumineuse L derrière l'écran B.



La lumière est composée de photons et comme nous l'avons vu au chapitre précédent (effet Compton) il y a diffusion des photons par les électrons, c'est-à-dire des collisions élastiques $\gamma + e^- \to \gamma + e^-$. En principe, il est possible de déterminer si la diffusion d'un photon se fait derrière le trou 1 ou le trou 2 et donc de déterminer par quel trou un électron est passé.

Remarque : pour illustrer aussi simplement que possible des points conceptuels importants, nous idéalisons considérablement la situation expérimentale. Nous verrons ultérieurement que les conclusions que nous tirons de cette "expérience idéalisée" sont universellement confirmées par toutes les expériences bien réelles cette fois qui ont été effectuées sur des systèmes quantiques !

Le résultat de notre "expérience idéalisée" avec installation de la source lumineuse L est de montrer sans la moindre équivoque possible que l'électron passe en effet par le trou 1 ou (exclusif) par le trou 2 !! En d'autres mots, pour chaque électron qui arrive éventuellement à l'écran C il y a diffusion de lumière derrière le trou 1 ou derrière le trou 2 et, pourvu que la source S soit suffisamment faible (c'est-à-dire que les électrons arrivent un à un) il n'y a jamais diffusion de lumière derrière les 2 trous à la fois ! Pour le dire autrement, la *charge électrique complète de l'électron* passe toujours par le trou 1 ou par le trou 2 et jamais par "fraction" à travers les 2 trous !

Nous semblons plongés en plein paradoxe !

En effet, achevons notre expérience idéalisée, c'est-à-dire nous détectons par quel trou l'électron passe (grâce à la source L) et nous mesurons la distribution d'arrivée des électrons sur l'écran C. Le résultat de l'expérience est que la distribution des électrons qui arrivent à l'écran C est donnée par la courbe (d) de la page 20, c'est-à-dire par $P_1 + P_2$! Ouf !! la logique est sauve. Dans l'expérience idéalisée nous pouvons en effet étiqueter *chacun* des électrons qui arrive sur l'écran C : celui-ci est passé par le trou 1 puisqu'il y a eu diffusion Compton derrière ce trou-là, tel autre électron est passé par le trou 2 ... etc. Par cet étiquetage, nous séparons les électrons en deux classes disjointes : ceux qui sont arrivés en C en passant par le trou 1 et ceux qui sont arrivés en C en passant par le trou 2.

Expérimentalement, on observe que les électrons de la première classe (ceux qui sont passés par le trou 1) ont une distribution donnée par P_1, tandis que ceux de la seconde classe (passés par le trou 2) ont une distribution donnée par P_2. Manifestement en combinant ces distributions le résultat global ne peut être que la courbe (d) et effectivement c'est bien ce qu'on observe. Remarquons au passage que la distribution des électrons dont on a déterminé qu'ils passent par le trou 1 est donné par P_1 que le trou 2 soit ouvert ou non. (Le trou 2 n'exerce aucune influence sur le mouvement des électrons qui passent par le trou 1).

Mais revenons à l'essentiel : *observer par quel trou l'électron passe modifie radicalement la distribution d'arrivée des électrons sur l'écran C.* (Je rappelle que par "observer" j'entends "utiliser un dispositif expérimental qui permette de déterminer").

Passer de la distribution P_3 (expérience à deux trous) à la distribution $P_1 + P_2$ (expérience idéalisée : 2 trous + source de lumière L) n'est pas un "petit" effet. En mots : *l'observation, en physique quantique, a comme effet de modifier radicalement le phénomène observé.*

Avant de commenter davantage les conséquences de cette assertion, revenons à notre expérience idéalisée et imaginons qu'on diminue l'intensité de la source lumineuse L derrière l'écran B (l'idée étant qu'une source lumineuse suffisamment faible ne devrait pas causer de modification "violente" dans la distribution d'arrivée en C). Mais la lumière est constituée de photons. Une lumière plus faible veut dire moins de photons et moins de photons signifie qu'on va "rater" des électrons, mais chaque fois qu'on "verra" un électron, la modification de sa probabilité d'arrivée en C sera tout aussi radicale.

Plus précisément un photon est une particule d'énergie $E = h\nu$ et de quantité de mouvement $p = \frac{h}{\lambda}$. Par conséquent dans une lumière plus faible il y aura moins de photons diffusés, mais pour chaque électron qui diffuse un photon l'effet sera toujours aussi dramatique. Dès lors, pour les électrons que l'on rate dans une lumière plus faible la distribution sera toujours donnée par la courbe P_3 tandis que pour les électrons qui diffusent des photons et que l'on détecte donc comme passant par le trou 1 ou (exclusif) par le trou 2 la distribution sera $P_1 + P_2$. Le résultat final sera une moyenne pondérée des courbes (c) i.e. P_3 et (d) i.e. $P_1 + P_2$. Dans une lumière forte, aucun éléctron n'est raté et la distribution est $P_1 + P_2$ tandis que dans une lumière très faible presque tous les électrons seront ratés et la distribution sera pratiquement donnée par P_3.

On peut pousser l'analyse un peu plus loin : puisque la modification de la distribution des électrons est liée à la quantité de mouvement des photons, ne peut-on diminuer celle-ci? Dans le langage de l'optique géométrique, diminuer la quantité de mouvement des photons revient à prendre une source lumineuse L dont la longueur d'ondes est de plus en plus grande et on ne peut localiser un objet qu'au moyen d'une onde lumineuse dont la longueur d'ondes est nettement plus petite que la taille de l'objet en question. Par cet argument dès que la longueur d'ondes est plus grande que la séparation des 2 trous on ne pourra plus détecter si l'électron est passé par le trou 1 ou par le trou 2. Dans un langage "photonique" il faut que la quantité de mouvement du photon reste suffisamment grande pour qu'il y ait diffusion et qualitativement il y a une limite au-delà de laquelle la diffusion ne sera plus "mesurable"!

La boucle est bouclée et nous pouvons à présent tirer les conclusions :

(1) Il n'y a pas de paradoxe dans la distribution d'arrivée des électrons sur l'écran C :

- si le point de passage (trou 1 ou trou 2) n'est pas déterminé (i.e. mesuré), la distribution est donnée par P_3;
- si le point de passage est déterminé, la distribution est donnée par $P_1 + P_2$.

(2) Toute observation menant à la détermination du point de passage de l'électron <u>doit</u> donc perturber la probabilité de distribution en C de manière <u>radicale</u> (c'est-à-dire suffisamment que pour passer de P_3 à $P_1 + P_2$).

Le côté inéluctable de la seconde conclusion est exprimé par le principe d'incertitude de Heisenberg auquel nous consacrons le paragraphe suivant.

IV Le principe d'incertitude de Heisenberg

C'est Heisenberg qui, le premier, a remarqué que la cohérence interne de la mécanique quantique implique une "*limitation intrinsèque*" sur ce qui est "possible" (théoriquement ou expérimentalement) dans le cadre de cette mécanique. Cette limitation intrinsèque est exprimée par son *principe d'incertitude*. Dans le cas de l'expérience à 2 trous, le principe d'incertitude affirme qu'"il est <u>impossible</u> de déterminer le point de passage de l'électron à travers l'écran B (trou 1 ou trou 2) sans nécessairement passer de la distribution P_3 à la distribution $P_1 + P_2$". Une autre manière d'exprimer le même principe est la suivante :
"toute tentative expérimentale de détermination du point de passage de l'électron à travers l'écran B sans perturber la distribution P_3 est vouée à l'échec" !

Il est évident, dans la présentation que nous en donnons, que la cohérence logique de la mécanique quantique exige que le principe d'incertitude soit universel, c'est-à-dire d'application pour toute méthode physique qui pourrait être utilisée pour la détermination du point de passage de l'électron.

Plus généralement, nous pouvons énoncer le principe d'incertitude comme suit :
"Il est impossible de rendre exclusive une alternative interférente sans détruire l'interférence".

Heisenberg n'a évidemment pas énoncé son principe d'incertitude sous cette forme ! Nous verrons ultérieurement comment passer de l'expression générale du principe d'incertitude à la forme plus "opérationnelle" donnée par Heisenberg à savoir : $\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$.

V Mécanique quantique et mécanique classique

La règle (II) du § **1.2**, à savoir

$$A(x_2, t_2; x_1, t_1) = \sum_c A_c(x_2, t_2; x_1, t_1) = \sum_c \exp \frac{iS_c(x_c(t))}{\hbar}$$

encode ce qu'il y a sans doute de plus caractéristique dans la physique quantique. D'une part tous les chemins sont *équiprobables* et, d'autre part, les différents chemins sont des *alternatives interférentes*. L'amplitude de probabilité totale se construit par *superposition linéaire* des amplitudes correspondant à chaque chemin particulier.

Par contre, en physique classique tous les chemins sont *interdits* <u>sauf un</u>, à savoir <u>la</u> trajectoire.

Mais tout système physique est en fin de compte composé d'atomes, d'électrons etc ... pour lesquels ce sont les lois et règles de la physique quantique qui sont d'application. Comment un système composé d'objets quantiques peut-il obéir aux lois de la physique classique ?

Nous esquissons un argument qualitatif qui indique que pour un système dont les dimensions (i.e. longueurs), masses et temps sont tels que S est colossalement grand en unités $\hbar$, les lois classiques s'obtiennent comme approximation ou plutôt comme limite des règles quantiques.

En d'autres mots

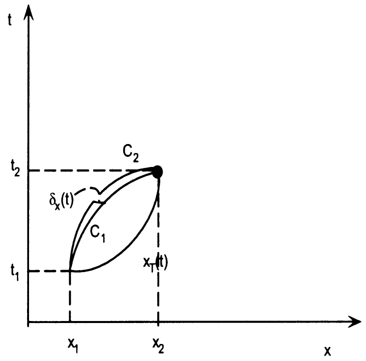
$$S >> \hbar \quad \Rightarrow \quad \text{"approximation classique" est valable}$$

pour rappel $\hbar = 0(10^{-27}$ erg sec)).

Cette conclusion est similaire à celle que l'on tire de la relativité restreinte d'Einstein (1905!!).

$$v << c \quad \Rightarrow \text{ approximation classique est valable.}$$

Voici l'argument. On a un système pour lequel $S/\hbar$ est énorme (p.ex. la lune). Considérons un chemin particulier donné C_1, pour ce système et voyons ce qui se passe lorsqu'on modifie ce chemin par un $\delta x(t)$ petit à l'échelle du système (p.ex dans le cas de la lune $\delta x(t) = 0$ (1 cm)!!).



$S_{C_2} = S_{C_1} + \delta S$ et δS est du premier ordre en δx, petit à l'échelle du système mais toujours énorme en unités $\hbar$. Dès lors en sommant sur l'ensemble des chemins proches (à l'échelle du système) de C_1 on obtiendra une amplitude de probabilité nulle (sommation sur des phases $e^{i\delta S/\hbar}$ qui oscillent extrêmement rapidement !). Dans le calcul de l'amplitude de probabilité totale nous pouvons donc laisser tomber tous les chemins C_1 dont les voisins ont une action $S_{C_1} + \delta S$ avec δS du premier ordre en δx. Il ne reste que la trajectoire classique $x_T(t)$. L'action étant *extrêmale* pour cette trajectoire, une variation $\delta x_T(t)$ ne modifiera pas l'action $S_T(x_T(t))$ du moins au 1er ordre. Tous les chemins voisins de la trajectoire ont tous une amplitude de probabilité de *même phase* (à l'ordre considéré) et la somme sera donc non nulle. Qualitativement, l'amplitude de probabilité est donc nulle pour les ensembles de chemins d'un même voisinage sauf pour la trajectoire classique.

Grosso modo dans la limite $\frac{S}{\hbar} \to \infty$ l'amplitude de probabilité est 1 pour la trajectoire classique et 0 pour tout autre chemin : les interférences propres à la physique quantique disparaissent et on retrouve les lois classiques.

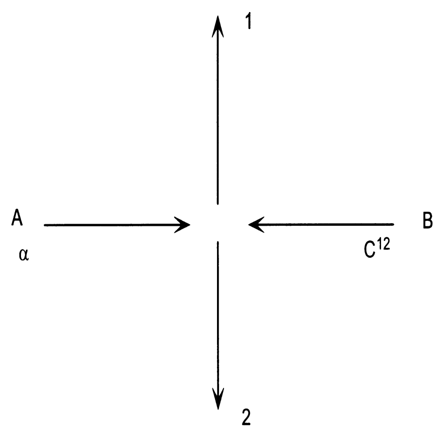
Il faut quand même remarquer que les chemins pour lesquels l'action ne diffère de $S_T(x_T(t))$ que d'une quantité de l'ordre de grandeur de $\hbar$ sont également importants. A cet ordre de précision, il reste un "flou" dans la notion de trajectoire classique. En pratique cela n'a évidemment aucune importance.

VI Particules identiques

L'expérience à 2 trous est un superbe exemple des règles de la mécanique quantique et de la notion d'alternative interférente ou exclusive suivant l'observation qui est faite.

Dans ce paragraphe, nous esquissons un exemple d'une situation où les alternatives sont toujours interférentes c'est-à-dire où aucune observation (i.e. dispositif expérimental) ne peut les rendre exclusives. Qui plus est, suivant les règles de la mécanique quantique, il ne sera jamais possible de rendre ces alternatives exclusives (Il s'agit effectivement d'une *loi de la nature*).

Considérons la diffusion à 90°, dans le repère du centre de masse, de deux noyaux et prenons, par exemple $\alpha \equiv H^4e$ et C^{12}.



Nous écrivons l'amplitude de probabilité pour cet évènement sous la forme $A_{\alpha,C^{12}}(1,2)$ dans le cas précis où la particule α est détectée en 1 et le C^{12} en 2. La probabilité de cette diffusion à 90° est donc donnée par

$$p = |A_{\alpha,C^{12}}(1,2)|^2.$$

Supposons un moment que nous ne soyons pas intéressés par la nature du noyau qui arrive dans le détecteur 1, i.e. peu nous importe que ce soit α ou C^{12}. Si c'est α, l'amplitude est $A_{\alpha,C^{12}}(1,2)$ tandis que si c'est C^{12}, l'amplitude est notée $A_{\alpha,C^{12}}(2,1)$ ... Mais par suite de la symétrie du problème (diffusion à 90°)

$$A_{\alpha,C^{12}}(2,1) = A_{\alpha,C^{12}}(1,2).$$

La probabilité d'un évènement où un des noyaux arrive en 1 et l'autre en 2 est manifestement donnée par

$$|A_{\alpha,C^{12}}(1,2)|^2 \quad + \quad |A_{\alpha,C^{12}}(2,1)|^2 = 2p_1.$$

Nous additionnons les probabilités puisque les deux alternatives {α arrive en 1 et C^{12} en 2} ou { α arrive en 2 et C^{12} en 1} sont exclusives : même si le résultat ne nous intéresse pas, nous pouvons toujours, du moins en principe distinguer ces alternatives sans interrompre le processus de diffusion de quelque manière que ce soit.

Mais que va-t-il se passer si nous remplaçons le C^{12} par des particules α i.e. nous mesurons la diffusion $\alpha + \alpha \to \alpha + \alpha$ à 90°. Les particules α étant identiques, il n'y a plus moyen de distinguer si la particule α arrivant dans le détecteur 1 vient de A ou de B. Les amplitudes correspondantes sont nécessairement interférentes et la probabilité de cet évènement est donc

$$|A_{\alpha\alpha}(1,2) + A_{\alpha\alpha}(2,1)|^2 = 4p_2. \tag{2.6}$$

Ce résultat spectaculaire est vérifié expérimentalement.

Pour des électrons ou des protons (à savoir des "particules de spin 1/2 entier"), le résultat est radicalement différent, mais comme nous n'avons pas encore introduit la notion de spin, nous devons remettre la discussion à plus tard. (En fait, dans le même état de spin on aura $A_{ee}(1,2) = -A_{ee}(2,1)$ et la probabilité de l'évènement sera donc 0. C'est une illustration du "principe de Pauli"!).

Pour des particules α ou des noyaux C^{12} etc ... (dont le spin est nul) le résultat (2.6) implique que dans le cadre de la mécanique quantique, le concept de particules identiques est *absolu*. Si les deux particules α, par exemple, n'étaient pas rigoureusement identiques, il y aurait moyen, demain ou dans 100 ans de distinguer le cas où c'est la particule "venant de A" qui arrive au détecteur 1 du cas où c'est la particule venant de B et le résultat expérimental serait $2p_2$ au lieu de $4p_2$.

Bien que notre argument soit incomplet, la conclusion est universellement vraie : tous les protons de l'univers sont rigoureusement identiques, il en va de même pour les électrons, les photons, etc ... et les interférences inhérentes à cette identité sont parmi les succès les plus remarquables de la mécanique quantique (la table de Mendeleev, le laser, ...).

VII L'équation de Schrödinger

Le problème qui nous reste à résoudre est de développer une méthode pratique pour calculer explicitement une amplitude de probabilité. Dans l'énoncé des règles de la mécanique quantique, nous avons esquissé la notion "d'intégrale de chemin". Nous pourrions maintenant préciser cette technique mathématique et faire de l'intégrale de chemin un outil *pratique* de calcul d'amplitudes. Cette manière de procéder exigerait des "développements formels" qui dépassent largement les objectifs de ce cours. Heureusement il y a une solution plus simple à notre problème : plutôt que de développer des techniques de calcul "global" d'une amplitude, il est beaucoup plus facile de déterminer comment cette amplitude doit se comporter "localement". Plutôt que de calculer des "intégrales de chemin", nous allons résoudre une équation différentielle. Rappelez-vous qu'en mécanique classique le principe de moindre action donne une caractérisation globale de la trajectoire entre 2 points, mais, en fait, pour calculer cette trajectoire on résoud les équations d'Euler-Lagrange. Ces équations encodent localement les conditions auxquelles la trajectoire doit satisfaire pour que "globalement" celle corresponde au minimum de l'action.

Commençons par définir une amplitude $\Psi(x,t)$ que nous appelerons l'*amplitude de Schrödinger.* (Hélas, l'usage veut que $\Psi(x,t)$ soit appelé une "fonction d'ondes" mais nous éviterons cette expression !!).

$\Psi(x,t)$ est l'amplitude de probabilité de trouver la particule au point x à l'instant t. La probabilité de l'évènement "la particule se trouve dans un intervalle dx autour du point x, au temps t, est donc donnée par

$$P(x,t)dx = |\Psi(x,t)|^2 dx.$$

Le changement de notation

$$A(x,t;x_1,t_1) \leftrightarrow \Psi(x,t)$$

se justifie par le fait que l'information supplémentaire contenue dans la notation A $(x,t;\ x_1,$ $t_1)$, à savoir que la particule était à un point x_1 à un instant (antérieur) t_1, ne sera tout simplement pas utilisée.

La règle de multiplication des amplitudes pour des évènements successifs (Eq. (2.5)) s'écrit maintenant

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy A(x,t;y,t')\Psi(y,t'). \tag{2.7}$$

Ceci est une "équation intégrale" pour la fonction d'ondes. La signification physique de cette équation est tout à fait limpide : l'amplitude d'être au point (x,t) est la somme (i.e. intégrale) sur tous les points y du produit de l'amplitude d'être en ce point, à un instant $t'\Big(\Psi(y,t')\Big)$ par l'amplitude d'aller de (y,t') en (x,t) $\Big(A(x,t;y,t')\Big)(t>t')$.

Transformer cette équation intégrale en une équation différentielle ne présente pas trop de difficultés (mais c'est quand même loin d'être trivial !). Les détails sont donnés dans l'Appendice 1.

Pour une particule *non relativiste de masse* m *dans un potentiel* $V(x)$, on obtient finalement

$$\boxed{i\hbar\,\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} \;+\; V(x)\;\Psi(x,t)}$$

C'est l'*équation de Schrödinger.* Cette équation est absolument fondamentale dans toute description des phénomènes quantiques non relativistes. Elle ne nous quittera plus!

VIII Résumé et commentaires

- *En physique quantique, on calcule la* probabilité *d'un processus physique.*

- *Cette probabilité est donnée par le module au carré d'une* amplitude de *probabilité.*

- *Dans le cas particulier d'une particule* non relativiste *l'amplitude de probabilité satisfait l'* équation de Schrödinger.

- *Dans le cas d'*alternatives interférentes*, on additionne les amplitudes tandis que pour des alternatives exclusives ce sont les probabilités que l'on somme.*

__Commentaires__

(1) Il n'est pas difficile de généraliser tous les raisonnements qui précèdent au cas d'une particule qui se meut dans un espace à 3 dimensions. En particulier l'équation de Schrödinger deviendra alors

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{x},t) + V(\vec{x})\Psi(\vec{x},t)}$$

où Δ est le laplacien. En coordonnées cartésiennes

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}.$$

(2) Les principes généraux de la physique quantique ont une validité qui va bien au-delà de celle de l'équation de Schrödinger. Ainsi la mécanique quantique est valable pour les *photons* (particules de lumière de masse nulle et en mouvement perpétuel à la vitesse c dans tous les repères inertiaux). Il n'y a pas d'équation de Schrödinger pour calculer les amplitudes de processus physiques avec des photons ! Plus généralement en mécanique quantique relativiste, il n'est plus question d'équation de Schrödinger mais le concept d'amplitude reste tout à fait valable. Signalons, pour exciter un peu votre curiosité, que la rencontre entre mécanique quantique et relativité restreinte a été conceptuellement explosive : mécanique quantique + relativité implique l'existence de l'antimatière !

Dans le contexte de la physique "élémentale", c'est-à-dire de la structure ultime de la matière et des interactions entre ces "constituants fondamentaux" (quarks, leptons, etc ...) la mécanique quantique est testée avec une précision incroyable. Pour vous donner une idée de cette précision, le moment magnétique μ de l'électron est aujourd'hui mesuré et calculé avec

$$\mu_{\text{mesuré}} = (1.001159652193 \pm 0.000000000010)\,\frac{e\hbar}{2m_e}$$

et $\mu_{\text{calculé}} = (1.001159652175)\,\frac{e\hbar}{2m_e}$ avec une "erreur théorique" plus grande que l'erreur expérimentale!

La précision de cette comparaison "théorie quantique" $\leftrightarrow$ expérience est de plusieurs ordres de grandeur supérieure à la précision avec laquelle les lois de Newton, par exemple, ont jamais été confrontées à l'expérience !!

(3) Dans l'énoncé des principes de la physique quantique nous avons insisté sur le fait que "in fine" les processus physiques sont une affaire de *particules.* Nous avons évité les expressions "ondes de matière", "propriétés ondulatoires de la matière" etc ... Ces expressions sont malheureusement d'un usage courant et se retrouvent dans pratiquement tous les livres ou articles consacrés à la physique quantique. Dans l'appendice 2 nous discutons de la signification de ces expressions qui sont la source de bien des confusions. En fait, il est plus simple et plus logique de ne pas utiliser de telles expressions !

Appendice 0

Quelques considérations zygomatico-philosophiques

Pénétrer dans l'univers de la physique quantique n'est pas facile. Dans ce chapitre j'ai essayé d'énoncer le plus clairement possible les principes de base de cette physique. Ces principes sont simples mais, nonobstant mes qualités pédagogiques évidentes, je ne doute pas que cet énoncé soulève pas mal de questions. Qu'est-ce que tout cela veut dire ? Amplitude de probabilité ? Alternative interférente ? C'est de la physique ça ou c'est de la philosophie ? Eh oui, la vie d'un jeune futur physicien est dure, dure ... Pour adoucir quelque peu vos tourments je voudrais terminer l'exposé des principes de la physique quantique par une espèce d'analogue de la "carte du tendre" de l'amour courtois. Je vous rappelle que cette carte indiquait au chevalier soupirant le chemin à suivre (p.ex. le "pont des soupirs") et les pièges à éviter (p.ex. le "lac de l'indifférence") pour conquérir le coeur de sa belle. Cette "carte de l'étudiant suant pour comprendre la mécanique quantique" est malheureusement moins romantique ...

∗ Une première difficulté dans l'apprentissage de la physique quantique vient d'une *confusion dans le langage.*

Vous avez probablement tous entendu ou lu des expressions ou phrases du style "comportement ondulatoire de la matière ... ", "dualité ondes-particules" ... , "le principe d'incertitude met une limite à la précision expérimentale ... " ou pire encore le "principe d'incertitude montre les limites de la science ... " Ha, ha, ha ! Ce n'est évidemment pas du tout de cela qu'il s'agit !! Le moment magnétique de l'électron, par exemple, est mesuré avec une précision phénoménale et le principe d'incertitude ne met aucune limite à cette précision. Quant aux "limites de la science" ... soyons sérieux ! Classiquement la position et la quantité de mouvement d'une particule sont, en principe, connaissables (théoriquement ou expérimentalement) avec une précision infinie ... c'est à ce préjugé épistémologique que les relations d'incertitude mettent une limite.

Je reviendrai sur ondes et particules dans l'appendice 2, mais je le répète encore une fois : un électron, par exemple, est une particule en tout lieu, en tout temps et en toute circonstance, l'électron n'est pas une onde, n'est pas accompagné d'une onde ... etc.

1ère règle de l'étudiant(e) de physique quantique : pas de charabia !

∗ Une difficulté plus sérieuse vient du caractère "abstrait" de l'énoncé des principes tel que je l'ai donné ici (soit dit au passage, ce n'est pas moi qui ai inventé cet énoncé : je l'ai copié de Feynman).

Pourquoi parler d'amplitude de probabilité et pas de ce que l'électron fait "concrètement"? C'est bien le noeud du problème : en physique quantique on ne dit pas ce que l'électron fait concrètement !! On calcule la probabilité que quelque chose se passe et puis c'est tout. Pour ne pas se casser la figure logiquement on est bien obligé de postuler ou d'admettre un monde physique "intrinsèquement probabiliste". C'est en accord avec tous les faits expérimentaux et personne n'a encore trouvé le moyen de faire autrement. Je vais essayer d'être clair à ce sujet.

Tout d'abord il y a de la probabilité en physique quantique. C'est un fait et il n'y a pas d'états d'âme à avoir à ce sujet : l'expérience à 1 trou on peut la répéter dix mille fois et 10 000 fois l'électron va arriver à un point différent de l'écran C. Amen.

La théorie quantique prétend être une théorie complète et alors il n'y a pas le choix : l'aspect probabiliste doit être intrinsèque et une "description concrète" n'est plus possible.

Logiquement il y a une alternative à cette conclusion. Dans le jargon technique cela s'appelle des "variables cachées" et la démarche conceptuelle est la suivante : la probabilité en physique quantique c'est comme la probabilité de gagner au Lotto ! Elle vient du fait qu'on ne connaît pas un certain nombre de facteurs (les "variables cachées"); si on les connaissait on gagnerait toujours au Lotto. Pour le dire autrement, la physique quantique n'est pas la fin de l'histoire ... Cette autre vision des choses est parfaitement logique, mais personne n'est encore parvenu à proposer des variables cachées qui tiennent la route c'est-à-dire qui ne soient pas en contradiction avec l'un ou l'autre principe fondamental de la physique (en particulier avec le principe de relativité). Le caractère intrinsèquement probabiliste de la physique quantique ne contredit aucun principe ! C'est une idée révolutionnaire et elle n'est certainement pas intuitive. Si cette idée est correcte et je répète qu'il n'y a aucun fait expérimental pour la mettre en doute, alors adieu la "description concrète des phénomènes" et on est bien obligé de parler "abstrait" !

2ème règle de l'étudiant(e) en mécanique quantique : on ne joue pas au Lotto !

∗ Une autre difficulté concerne le "rôle de l'observation". Je rappelle qu'il n'y a rien de subjectif dans la notion d'observation (on ne fait pas de psychologie ici, ouf !). Un dispositif expérimental "perturbe" un système quantique. Dans le cas de l'expérience à deux trous, l'observation détermine par quel trou l'électron est passé (ça c'est vrai) et on en conclut quelquefois que si on n'observe pas l'électron il ... passe par les deux trous à la fois (ça, c'est absurde).

Einstein était tellement allergique à cette "importance de l'observation" qu'on lui prête la réflexion suivante, faite à Max Born par un soir de printemps au clair de lune (enfin un peu de romantisme !) : "Max, croyez-vous vraiment que la lune n'est pas là quand personne ne la regarde" ?

Le rôle de l'observation est effectivement beaucoup plus "perturbant" en mécanique quantique qu'en mécanique classique. Pour comprendre de quoi il s'agit, il faut d'abord être prudent dans les assertions que l'on fait sur le monde physique. Dans l'accélérateur LEP du CERN, par exemple, un faisceau d'électrons et un faisceau de positrons se propagent à plus de 290 000 km/s et ces faisceaux sont, bien entendu, "contrôlés" en continu. La "perturbation du système causée par l'observation" n'empêche nullement la stabilité de ces faisceaux pendant des heures et des heures. Dans l'expérience à deux trous, la mécanique quantique ne dit pas que l'électron passe par les deux trous si on ne l'observe pas (l'électron n'est pas une onde !!). Subtilement la mécanique quantique dit seulement ceci : voyez-vous, il y a une amplitude de probabilité pour qu'il passe par l'un ou par l'autre trou. Si on n'observe pas l'électron, eh bien, vous additionnez les amplitudes ... etc ... !

Une manière d'exprimer les choses, due à Bohr, est de se dire qu'un "phénomène quantique doit être considéré dans son entièreté". Bohr voulait dire par là que le phénomène "l'électron passe à travers l'écran percé de deux trous et est observé en C" et le phénomène "l'électron passe à travers deux trous percés dans un écran, on mesure par quel trou il passe et il est observé en C" sont deux phénomènes quantiques *différents*. C'est effectivement assez subtil !?!

Intuitivement l'amplitude de probabilité d'un processus donné est pour ainsi dire en construction permanente (par addition des amplitudes de chaque alternative). Une mesure détruit cette construction en excluant certaines alternatives ou, encore, une mesure force un ajustement de l'amplitude parce que ce qui était possible ne l'est plus. Si, malgré la règle 2, vous jouez quand même au Lotto, vous savez comment ajuster la probabilité de gain après le tirage de une, deux, ou plusieurs boules. En physique quantique, ce n'est pas la probabilité qu'on ajuste, mais l'amplitude !

3ème règle de l'étudiant(e) en mécanique quantique : quand on regarde l'un(e), on exclut l'autre !

∗ La difficulté de base de la mécanique quantique est liée à l'idée plus ou moins intuitive que l'on a de la *réalité physique* et des rapports entre celle-ci et la théorie ou l'expérience ! Aie, aie ! le terrain devient très glissant ... La lune est-elle ou n'est-elle pas là quand personne ne la regarde ? La réponse ne fait aucun doute : en physique classique ou entend par "réalité physique" ou "réalisme" le fait qu'un système a des propriétés intrinsèques indépendantes de l'observation ou non que l'on fait du système. Dans ce sens, la mécanique quantique n'est pas réaliste : la position d'un électron n'est, en général, pas définissable (c'est-à-dire qu'elle n'a qu'une certaine distribution de probabilité) si elle n'est pas mesurée !!!

En physique quantique, la notion de "réalité physique" est indiscutablement plus "floue" et plus "circonstancielle" qu'en physique classique. C'est comme cela !

4ème règle de l'étudiant(e) en mécanique quantique : la philosophie, c'est mauvais pour la santé des jeunes !

∗ Une "difficulté", dans le contexte de l'expérience à deux trous par exemple vient de questions du genre : "comment l'électron fait-il réellement pour passer de l'autre côté de l'écran percé de deux trous quand on n'observe pas par quel trou il passe?". La seule réponse honnête est : "je ne sais pas !" Mais c'est la même réponse qu'il faut donner à la question "comment la lune fait-elle, réellement, pour tourner autour de la terre?". Bien sûr je peux écrire les équations de Newton, et les intégrer et, tout aussi bien sûr, je peux résoudre l'équation de Schrödinger et calculer la probabilité d'arrivée d'un électron sur l'écran C !

5ème règle de l'étudiant(e) en mécanique quantique : la nature lit des bouquins de maths ! (Galilée)

Avec ces règles, un peu de bon sens et beaucoup de travail il est trivial de comprendre la mécanique quantique ! Bon amusement !

P.S. Cet Appendice n'est pas matière d'examen !

Appendice 1

L'équation de Schrödinger

Comme promis, dans cet appendice nous dérivons l'équation de Schrödinger à partir des principes de la mécanique quantique. Pour rappel, nous considérons le cas d'une particule *non relativiste*, de masse m, dans un potentiel $V(x)$. Classiquement le lagrangien est donc donné par

$$L = \frac{1}{2} m \mathring{x}(t)^2 - V(x).$$

Pour dériver l'équation de Schrödinger, nous partons de l'équation (2.7) pour l'amplitude de Schrödinger $\Psi(x,t)$, à savoir

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x,t;y,t_1) \;\; \Psi(y,t_1)\, dy$$

et nous appliquons cette équation dans le cas où t diffère infinitésimalement de t_1. En changeant de notation nous pouvons écrire

$$\Psi(x,t+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x,t+\varepsilon;y,t) \;\; \Psi(y,t)\, dy.$$

Le noyau de cette équation peut s'approximer à l'ordre ε de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A(x,t+\varepsilon;y,t) &\cong N(\varepsilon)\ \exp \frac{i}{\hbar} \int_t^{t+\varepsilon} L\, dt \\ &\cong N(\varepsilon)\ \exp \frac{i\varepsilon}{\hbar}\, L\left(\frac{x-y}{\varepsilon}, \frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

où $N(\varepsilon)$ est un "facteur de normalisation" qui peut dépendre de ε. Pour chaque chemin infinitésimal de (y,t) à $(x,t+\varepsilon)$ nous avons bien que

$$A_C(x,t+\varepsilon;y,t) \approx \exp \frac{i}{\hbar} S_C \cong \exp\ i\frac{\varepsilon}{\hbar} L \left(\frac{x-y}{\varepsilon}, \frac{x+y}{2}\right)$$

puisque, à cet ordre $\mathring{x} \approx \frac{x-y}{\varepsilon}$ etc ... En sommant sur tous les chemins nous devons simplement introduire le facteur $N(\varepsilon)$.

Dès lors

$$\Psi(x,t+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(\varepsilon) \exp \frac{i}{\hbar} \frac{m(x-y)^2}{\varepsilon}\ \exp\ \frac{-i\varepsilon}{\hbar}\ V\left(\frac{x+y}{2}\right)\ \Psi(y,t)\, dy.$$

Dans cette expression, $\exp \frac{i}{\hbar}\frac{m(x-y)^2}{\varepsilon}$ va osciller violemment en fonction de y pour tout y très différent de x et comme les autres facteurs $\Psi(y,t)$ et $\exp \frac{-i}{\hbar} V\left(\frac{x+y}{2}\right)$ sont à variation douce, le résultat de l'intégration sera nul. Ce n'est que dans le cas où y est proche de x que nous aurons des contributions significatives. Physiquement ce résultat est évidemment raisonnable ! Nous changeons donc encore une fois de variable en posant $y = x + \eta$. Dès lors

$$\Psi(x, t+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(\varepsilon) \exp \frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon} \exp -\frac{i\varepsilon}{\hbar} V\left(x + \frac{\eta}{2}\right) \Psi(x+\eta, t) d\eta.$$

Les contributions importantes dans l'intégrale sur η viendront de la région η de l'ordre $\left(\frac{2\varepsilon\hbar}{m}\right)^{1/2}$. Pour ε infinitésimal, η^2 est donc d'ordre ε. Nous pouvons à présent développer en séries et, à l'ordre ε,

$$\begin{aligned} \Psi(x, t+\varepsilon) &= \Psi(x) + \varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ \Psi(x+\eta, t) &= \Psi(x) + \eta \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \\ \exp -\frac{i\varepsilon}{\hbar} V\left(x + \frac{\eta}{2}\right) &= 1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\Psi(x,t) + \varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} N(\varepsilon) e^{\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}} \left[1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x)\right] \left\{\Psi(x,t) + \eta \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \cdots \right\} d\eta.$$

A l'ordre 0 en ε, le membre de gauche est simplement $\Psi(x,t)$, tandis que dans le membre de droite nous avons $\Psi(x,t)$ multipliée par le facteur

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(\varepsilon) e^{\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}} d\eta$$

qui doit donc être égal à 1. Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\alpha x^2 + \beta x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{-\alpha}} \exp -\frac{\beta^2}{4\alpha} \quad , \Re e(\alpha) \leq 0$$

nous en tirons $N(\varepsilon) = \left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{-1/2}$. Avec les valeurs des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(\varepsilon) e^{\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}} \eta d\eta = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} N(\varepsilon) e^{\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}} \eta^2 d\eta = \frac{i\hbar\varepsilon}{m}$$

nous obtenons finalement

$$\Psi(x,t) + \varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Psi(x,t) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x)\Psi(x,t) + \frac{i\hbar\varepsilon}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

soit encore, à l'ordre ε

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} V(x)\Psi(x,t) + \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

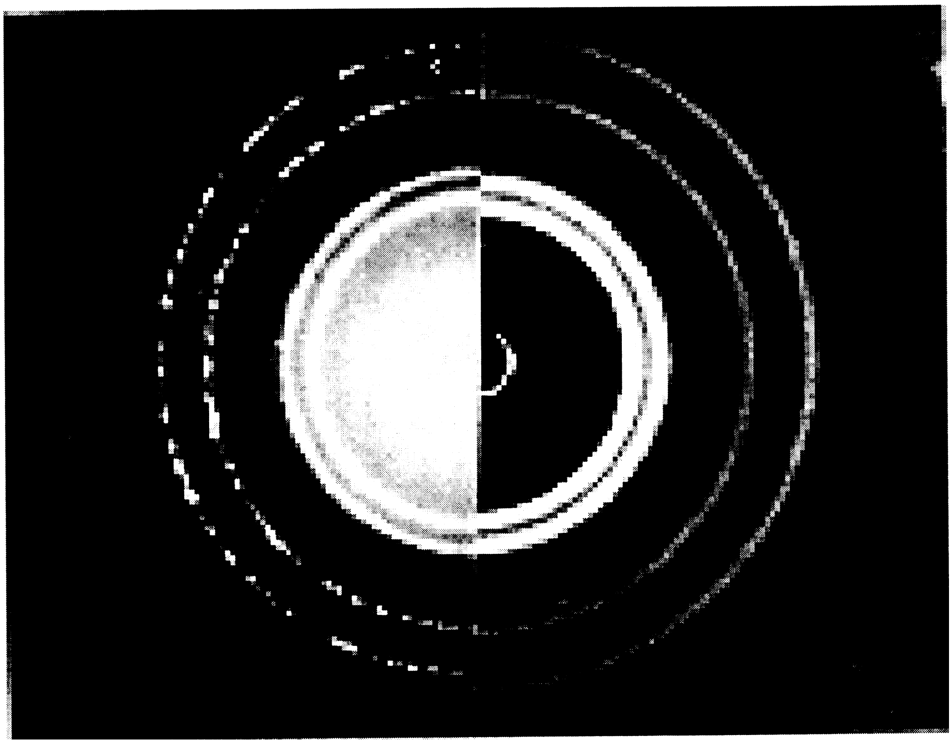
qui n'est autre que l'équation de Schrödinger.

Appendice 2

Particules et Ondes

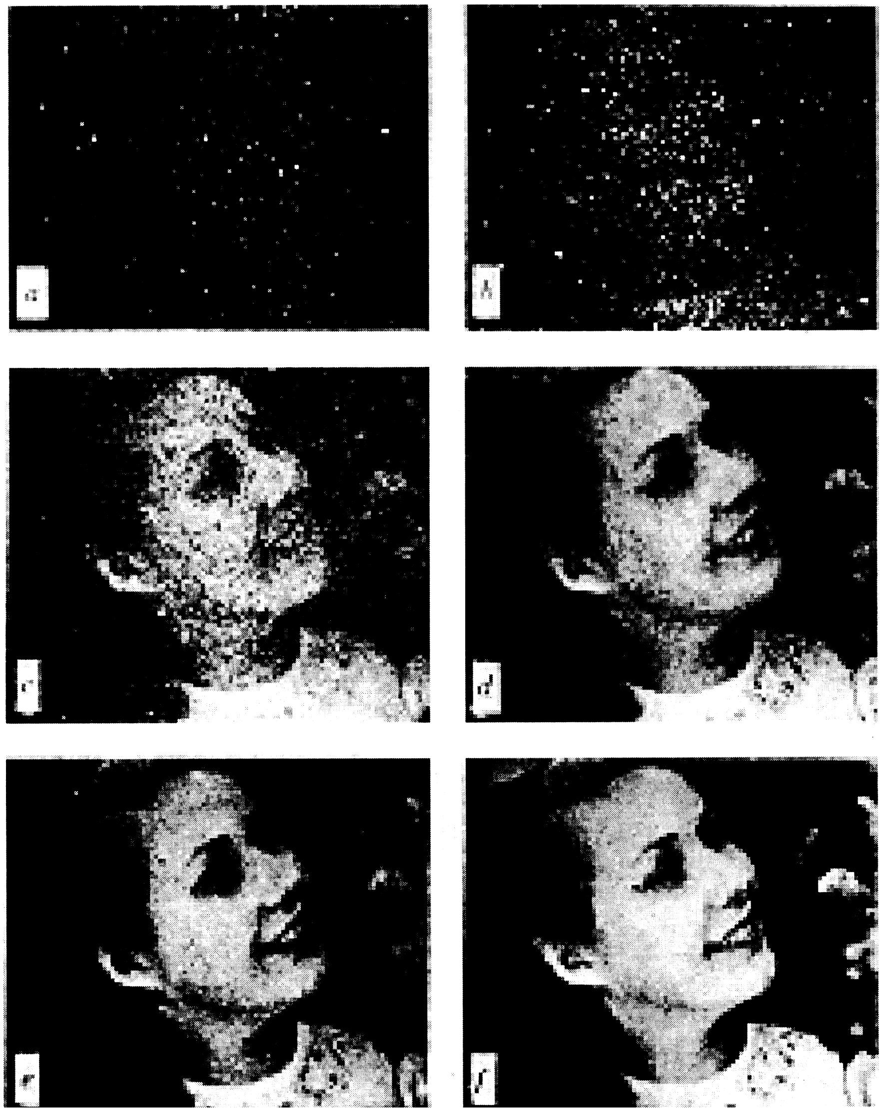
Dans cet appendice nous revenons sur quelques assertions faites dans les deux premiers chapitres concernant les notions de "particules" et d'"ondes".

Pour rendre la discussion aussi concrète que possible, examinons les résultats expérimentaux de la diffusion par une feuille d'aluminium d'un faisceau d'électrons et d'un faisceau de rayons x.



La similitude des figures est frappante. Et bien entendu la description et l'explication correcte du phénomène sont les mêmes dans les deux cas : électrons et photons sont des particules qui obéissent aux lois de la physique quantique et les figures de diffraction découlent de ces lois comme nous le verrons en détail dans la suite.

Dans les deux cas, les figures de diffraction peuvent s'obtenir en faisant l'expérience avec des électrons ou des photons qui arrivent un à un. C'est dans ce sens qu'il n'y a aucun doute sur la nature corpusculaire de l'électron et du photon : on peut les compter. D'autre part, il n'y a nul besoin de mécanique quantique pour obtenir la figure de diffraction dans le cas des rayons x : le champ électromagnétique donné par des solutions des équations de Maxwell est parfaitement bien décrit par une *onde* dont la nature physique est bien réelle (ondes radio p.ex.). Dans le contexte de la mécanique quantique, l'onde électromagnétique "classique" est une superposition cohérente d'un très grand nombre de *photons*. Ce point est magnifiquement illustré par la série de photographies suivante (French, p. 89).



Ceci est également une "preuve expérimentale" de la "limite classique" de la mécanique quantique. Un très grand nombre de photons peut très bien se comporter comme une "onde électromagnétique" et il n'y a aucune confusion conceptuelle dans cette assertion. La structure "ultime" de la lumière est corpusculaire même si un grand nombre de ces corpuscules ont, ensemble, un comportement ondulatoire. (Une corde vibrante est un ensemble de molécules et il n'y a rien de mystérieux dans le comportement ondulatoire de ce grand nombre de particules).

La véritable confusion conceptuelle vient de la tentation d'interpréter les figures de diffraction des électrons en terme d'une onde (physique réelle) analogue au champ électromagnétique !

La source de cette confusion remonte à L. de Broglie qui en 1924 propose une théorie "révolutionnaire" de la matière et de la lumière basée sur la "dualité onde-particule". Nous y voilà !

de Broglie commence par analyser en détail les conséquences de la relation d'Einstein $E = h\nu$ dans le contexte de la relativité restreinte. Le résultat essentiel de son analyse est la relation

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{1}$$

que de Broglie exprime grosso modo de la manière suivante : *à toute particule* d'impulsion p est associée une onde de longueur d'onde $\frac{h}{p}$.

Nous avons déjà (trivialement) dérivé la relation (1) pour des photons (particules de masse nulle) à partir des relations d'Einstein $E = h\nu = cp$. de Broglie, quant à lui, postule que le photon a une masse au repos non-nulle m_0 et commence son analyse dans le repère au repos de ce photon "massif" avec $h\nu_0 = m_0c^2$. Il en déduit alors la relation (1) (ce n'est pas trivial!) et conclut audacieusement à l'universalité de cette relation et donc à la "dualité onde-particule".

L'idée de de Broglie est spectaculairement confirmée (entre autres) par l'expérience de G.P. Thompson (le fils de J.J.!) sur la diffraction des électrons. Dans cette expérience, les électrons ont une énergie de l'ordre de 10–40 kev, leur "longueur d'onde de de Broglie" est de l'ordre du dixième d'Angström et les figures de diffraction sont en accord remarquable avec les prédictions de de Broglie.

Malgré ces succès éclatants et sans le moins du monde mettre en cause le rôle historique capital de de Broglie, force est de constater son idée est la source de bien des confusions conceptuelles : il n'y a <u>pas</u>, dans aucun sens physique du terme, d'<u>onde</u> réelle associée à l'électron !

Dans le contexte de la mécanique quantique — et nous le montrerons explicitement dans le chapitre suivant — c'est *l'amplitude de probabilité d'une particule libre* d'impulsion p qui a la structure mathématique d'une onde de longueur d'onde $\frac{h}{p}$.

Dans ce sens, les succès expérimentaux de la relation de de Broglie sont des succès expérimentaux de la mécanique quantique tandis que la "dualité onde-particules" est une confusion conceptuelle qui devrait être rangée dans les oubliettes de l'histoire !

En résumé :

- électrons, photons (de même que neutrons, photons etc ...) sont des *particules* (on peut les compter);

- pour une particule libre d'impulsion p, l'amplitude de Schrödinger a la structure mathématique d'une onde (de longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{p}$) mais l'amplitude de probabilité n'est pas une onde physique qui se propage dans l'espace !