

# 1 Introduction sur la conjecture de Goldbach et objet du document :

-Énoncé-Origine de la conjecture (source Wikipédia) :

"La conjecture de Goldbach est l'assertion mathématique qui s'énonce comme suit :

*Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme une somme de deux nombres premiers.*

Formulée en 1742 par Christian Goldbach, c'est l'un des plus vieux problèmes non résolus de la théorie des nombres et des mathématiques.

Il partage avec l'hypothèse de Riemann et la conjecture des nombres premiers jumeaux le numéro 8 des problèmes de Hilbert, énoncés par celui-ci en 1900."

-Ce document se propose de démontrer la conjecture de Goldbach, et que l'on peut résumer en : " $(N + N = P_1 + P_2)$ ".

Exemple :  $9 + 9 = 7 + 11 = 5 + 13$ .

*-Extrait de la définition de "Groupe (mathématiques)" , utile pour ce document (source Wikipédia) :*

"La définition formelle suivante, qui englobe l'exemple précédent et beaucoup d'autres, dont les groupes de symétries détaillés plus bas, permet de comprendre ces structures sans traiter chaque cas séparément. Un groupe est un couple  $(G, *)$  dont le premier terme est un ensemble  $G$  et le second une opération " $*$ " (on dit aussi loi de composition) sur cet ensemble qui, à deux éléments  $a$  et  $b$  de  $G$ , associe un autre élément  $a * b$ . Le symbole " $*$ " est un signe général qui désigne une opération donnée, comme l'addition ci-dessus. On exige que la loi satisfasse quatre propriétés : les axiomes de groupe[5].

*Loi de composition interne* : Pour tous  $a$  et  $b$  éléments de  $G$ , le résultat  $a * b$  est aussi dans  $G$ .

*Associativité* : Pour tous éléments  $a$ ,  $b$  et  $c$  de  $G$ , l'égalité  $(a * b) * c = a * (b * c)$  est vraie.

*Élément neutre* : Il existe un élément  $e$  de  $G$  tel que, pour tout  $a$  dans  $G$ ,  $e * a = a * e = a$ , " $e$ " est appelé élément neutre du groupe  $(G, *)$ .

*Symétrique* : Pour tout élément  $a$  de  $G$ , il existe  $b$  dans  $G$  tel que  $a * b = b * a = e$ , et  $e$  est l'élément neutre.  $b$  est appelé symétrique de  $a$ .

L'ordre des arguments peut ne pas être indifférent, autrement dit l'égalité :  $a * b = b * a$

n'est pas toujours vraie. Un groupe dans lequel on a toujours  $a * b = b * a$  est dit commutatif, ou abélien (en l'honneur de Niels Abel)[5]. Ainsi, le groupe additif des nombres entiers relatifs est abélien mais le groupe de symétrie décrit ci-dessous ne l'est pas."

## 2 Résumé de chaque section de ce document :

la section 3 :

"Caractéristiques des groupes  $G_{Fm}(\otimes)$  possédant des formes multiples de l'élément neutre  $n_e$ "

aborde toutes les caractéristiques de ces groupes et que l'on retrouve ensuite dans la section 5.

l'expression, la définition de l'élément neutre  $n_e$  dépend d'un paramètre numérique  $K$ . Ainsi  $n_e = F(K_{n_e})$  et  $F(K_{n_e})$  est appelée forme de  $n_e$ .

Les autres formes de  $n_e$  sont obtenues pour chaque composition d'un élément  $e_i$  avec son symétrique  $\bar{e}_i$  :  $e_i \otimes \bar{e}_i = F(K_i)$  ou  $e_j \otimes \bar{e}_j = F(K_j)$ .

$F(K_i)$  et  $F(K_j)$  ont la même définition, la même valeur logique :

$F(K_i) = F(K_j) = n_e$ . L'expression de ces formes étant très reconnaissable.

la section 4 :

"Exemple de groupe  $G_{Fm}(\otimes) : Z_{Fm}(\oplus) :$ "

donne un exemple de groupe de type  $G_{Fm}(\otimes)$  afin de se familiariser avec la définition de formes multiples de l'élément neutre  $n_e$ .

la section 5 :

"Caractéristiques des groupes  $G(\otimes, N + N)$ "

Les groupes  $G(\otimes, N + N)$  ont les mêmes caractéristiques que les groupes  $G_{Fm}(\otimes)$  possédant des formes multiples de l'élément neutre  $n_e$ .

Les groupes  $G(\otimes, N + N)$  sont construits suivant la question posée par la conjecture et résumée ainsi : " $N + N = P_1 + P_2$  ?".

Ainsi les éléments irréductibles de  $G(\otimes, N + N)$  reflètent les cas possibles de la conjecture pour un nombre pair  $N+N > 3$ .

la section 6 :

"Morphisme de groupe entre  $G(\otimes, N + N)$  et  $Z(\oplus, N + N)$ "

**clos la démonstration**

et consiste à construire un morphisme de groupe entre  $G(\otimes, N + N)$  et un 2ème groupe  $Z(\oplus, N + N)$  pour lequel la propriété sur les formes multiples est conservée et avec comme élément neutre  $n_{e,z}$  : le couple (1, 1). Cet élément est donc l'image, par l'application  $G \xrightarrow{f} Z$ , d'un ou plusieurs éléments  $(P_1, P_2)$  du groupe  $G(\otimes, N + N)$ ,  $P_1$  et  $P_2$  étant des nombres premiers, ce qui clos bien la démonstration car alors  $N + N = P_1 + P_2$ .

la section 7 :

"Application du raisonnement précédent au groupe  $G(\otimes, 9 + 9)$ ".

### 3 Caractéristiques des groupes $G_{Fm}(\otimes)$ possédant des formes multiples de l'élément neutre $n_e$ :

#### 3.1 Eléments irréductibles :

$Cl_1$  : L'ensemble  $G_{Fm}(\otimes)$ , avant toute composition entre éléments  $(e_i \otimes e_j)$ ,

possède un nombre fini d'éléments  $e_i$  distincts,  $i$  variant de 1 à  $N$ , possède les  $N$  éléments  $\bar{e}_i$  symétriques des éléments  $e_i$  ainsi que l'élément neutre  $n_e$ .

$Cl_2$  : Tous ces éléments  $e_i$ ,  $\bar{e}_i$  et  $n_e$  sont dits irréductibles car il n'existe pas d'éléments  $e_j$ ,  $e_k \dots e_l$  parmi ces  $N+N+1$  éléments de  $G_{Fm}(\otimes)$  :  $e_i$ ,  $\bar{e}_i$  et  $n_e$  tels que  $(e_i$  ou  $\bar{e}_i$  ou  $n_e)$  soit  $= e_j \otimes e_k \otimes \dots \otimes e_l$  et avec  $j$  et  $k \dots l$  différents de  $i$ .

Une exception est faite pour l'élément neutre  $n_e$  car par définition :  $e_i \otimes \bar{e}_i = n_e$ .

De plus, le fait que  $j$  et  $k \dots l$  soient différents de  $i$  pour l'expression  $e_i = e_j \otimes e_k \dots e_l$  est justifié pour les égalités avec  $n_e$  :  $n_e = n_e \otimes n_e$ ,  $e_i \otimes n_e = e_i$  et  $\bar{e}_i \otimes n_e = \bar{e}_i$ .

$Cl_3$  : Ces éléments  $e_i$ ,  $\bar{e}_i$  et  $n_e$  figurent dans une liste

$L_{irr} = (e_1, e_2, \dots, e_N, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_N, n_e)$  qui sera utilisée ultérieurement.

Le cardinal de la liste  $L_{irr}$  est donc égal à  $N+N+1=2*N+1$  avec  $N>0$  : l'élément neutre  $n_e$  ne peut figurer seul dans ce type de groupe.

#### 3.2 Loi de composition interne $\otimes$ :

$Cl_1$  : La loi  $\otimes$  est une fonction  $f$  de l'ensemble  $G_{Fm}$  pour laquelle  $f(e_j, e_k) = e_l$  et notée  $e_j \otimes e_k = e_l$ .

$e_j$  et  $e_k \in G_{Fm}$  alors pour la composition  $e_j \otimes e_k = e_l$ ,  $e_l \in G_{Fm}$ .

$Cl_2$  : La loi  $\otimes$  est commutative :  $e_i \otimes e_j = e_j \otimes e_i$ .

$Cl_3$  : La loi  $\otimes$  est associative :  $e_i \otimes (e_j \otimes e_k) = (e_i \otimes e_j) \otimes e_k$ .

$Cl_4$  : La loi  $\otimes$  est déclarée interne quand un élément  $e_c$  est composé exclusivement d'un nombre fini d'éléments irréductibles de  $G_{Fm}(\otimes)$ , c'est à dire :  $e_c = e_a \otimes e_b \otimes e_c \otimes \dots \otimes e_k$  et pour un nombre fini de compositions avec  $\otimes$ . Alors  $e_c \in G_{Fm}(\otimes)$ .

$Cl_5$  : Pour un élément  $e_c$  résultant, à priori, d'une ou plusieurs composi-

tions avec la loi  $\otimes$ , ET pour répondre à  $Cl_4$ , la loi  $\otimes$  possède une loi inverse  $\otimes^{-1}$   
telle que si  $e_1, e_2, e_k, e_i \in L_{irr}$  et si  $e_c = e_1 \otimes e_2$  alors  $e_c \otimes^{-1} e_1 = e_2$ ,  
 $e_c \otimes^{-1} e_2 = e_1$   
et  $e_i \otimes^{-1} e_k = \text{Impossible}$  : calcul impossible pour un élément irréductible.

$Cl_6$  : On peut alors construire un algorithme qui permet de savoir pour un élément  $e_c$ , à priori déjà composé et pour un nombre limité de compositions, si  $e_c \in G_{Fm}(\otimes)$  ou si  $e_c \notin G_{Fm}(\otimes)$  .  
Ainsi on effectue un ensemble de calculs appelé cycle de calculs, cycle car on peut être amené à le réaliser plusieurs fois.  
Chaque cycle va correspondre à une sous-décomposition de niveau  $k$  de  $e_c$ .  
Le premier cycle correspondant au niveau 1.

Ainsi on calcule  $e_c \otimes^{-1} e_i$  pour tous les éléments  $\in L_{irr}$ .

Le calcul donne :

soit  $e_c \otimes^{-1} e_i = \text{Impossible}$ , et pour ce cas on refait le calcul avec un autre élément de  $L_{irr}$  ;

soit  $e_c \otimes^{-1} e_i = e_{c_{2,i}}$  et pour ce cas on mémorise  $e_{c_{2,i}}$  et on refait le calcul avec un autre élément de  $L_{irr}$ .

Le premier cycle terminé, et si l'on a trouvé un ou plusieurs éléments  $e_{c_{2,i}}$ , on recommence alors un autre cycle pour le calcul  $e_{c_{2,i}} \otimes^{-1} e_i$  , ceci pour chaque  $e_{c_{2,i}}$  mémorisé au cycle précédent et toujours pour tous les éléments  $\in L_{irr}$ .

La liste  $L_{irr}$  est en nombre fini comme le nombre supposé de compositions de l'élément  $e_c$ .

Aussi l'algorithme s'arrête avec le résultat :  $e_{c_{k,i}} \otimes^{-1} e_i = \text{Impossible}$  pour tous les éléments  $\in L_{irr}$ , ( $e_{c_{k,i}}$  :  $k$ ème sous-décomposition de  $e_c$  ).

Selon  $k$  et  $i$  on peut obtenir plusieurs éléments :  $e_{c_{k,i}}$ .

Et chaque  $e_{c_{k,i}}$  correspond au dernier élément issu du dernier calcul non "Impossible".

Alors si au moins un des éléments  $e_{c_{k,i}} \in L_{irr}$ , on conclut que  $e_c \in G_{Fm}(\otimes)$ .

Et si tous les éléments  $e_{c_{k,i}} \notin L_{irr}$ , on conclut que  $e_c \notin G_{Fm}(\otimes)$ .  
(rappel :  $e_i \otimes^{-1} e_k = \text{Impossible}$  : calcul impossible pour un élément irréductible ( $e_i, e_k \in L_{irr}$ )).

### 3.3 Élément neutre $n_e$ du groupe $G_{Fm}(\otimes)$ - Élément symétrique $\bar{e}_i$ de l'élément $e_i$ :

*Cne<sub>1</sub>* : Pour l'ensemble  $G_{Fm}(\otimes)$  il existe un unique élément neutre  $n_e$  tel que  $e_i \otimes n_e = e_i$ .

$e_i$  reste irréductible même si  $e_i \otimes n_e = e_i$  : c'est le seul cas accepté du fait de la définition de l'élément neutre.

Rappel : Unicité de l'élément neutre  $n_e$  :

Supposons que l'élément neutre  $n_{e1}$  ne soit pas unique et soit alors  $n_{e2}$  un autre élément neutre.

Alors pour tout élément  $e_x$  et  $e_y$  de  $G_{Fm}(\otimes)$  :

$$e_x \otimes n_{e1} = e_x \text{ et } e_y \otimes n_{e2} = e_y.$$

Remplaçons  $e_x$  par  $n_{e2}$  et  $e_y$  par  $n_{e1}$

on obtient alors  $n_{e2} \otimes n_{e1} = n_{e2}$  et  $n_{e1} \otimes n_{e2} = n_{e1}$ .

Soit  $n_{e2} = n_{e1}$ . L'élément neutre est bien unique.

*Cs<sub>1</sub>* : Pour chaque élément irréductible  $e_i$  de l'ensemble  $G_{Fm}(\otimes)$  il existe un unique élément symétrique  $\bar{e}_i$ , lui aussi irréductible, tel que  $e_i \otimes \bar{e}_i = n_e$ .

*Cne<sub>2</sub>* : l'expression, la définition de  $n_e$  dépend d'un paramètre numérique  $K$ .

Ainsi  $n_e = F(K_{n_e})$  et  $F(K_{n_e})$  est appelée forme de l'élément neutre  $n_e$ .

Les autres formes de  $n_e$  sont obtenues pour chaque composition :  $e_i \otimes \bar{e}_i = F(K_i)$  ou  $e_j \otimes \bar{e}_j = F(K_j)$ .

$F(K_i)$  et  $F(K_j)$  ont la même définition, la même valeur logique :  $F(K_i) = F(K_j) = n_e$ .

Néanmoins pour une forme  $F(K_x)$ , à priori non irréductible et pour laquelle on ne connaît pas sa composition, il faudra démontrer que sa composition est faite à partir d'éléments irréductibles de l'ensemble, pour la déclarer comme forme de l'élément neutre  $n_e$ .

Exemple :  $F(K) = (K, K)$  avec  $K$  naturel  $\geq 1$  et  $F(K_{n_e}) = (1, 1)$ . Ainsi  $(1, 2) \oplus (2, 1) = (3, 3) = F(3)$  et  $(1, 1) = (2, 2) = (3, 3) = (K, K) = n_e$ .

### 3.4 Conditions d'obtention de l'élément neutre $n_e$ et sa forme $F(K_{n_e})$ :

Dans ce paragraphe on suppose que les connaissances se limitent aux éléments  $e_i$ ,  $\bar{e}_i$ , les formes  $F(K_j) = e_j \otimes \bar{e}_j$ .

Aussi l'analyse qui suit se focalise sur la recherche des conditions d'obtention de l'élément neutre  $n_e$  et sa forme  $F(K_{n_e}) = n_e$ .

Pour que  $G_{Fm}(\otimes)$  soit un groupe, l'élément neutre  $n_e$  doit exister et ceci à part entière dans  $G_{Fm}(\otimes)$ .

C'est le cas pour un groupe avec une forme unique de l'élément neutre, car dès que celui-ci est défini, il intègre alors la liste  $L_{irr}$  et il existe alors à part entière.

Pour un groupe avec des formes multiples de l'élément neutre, la forme  $F(K_{n_e}) = n_e$  ne peut correspondre à une composition :  $e_j \otimes \bar{e}_j$  ou  $F(K_{n_e}) = F(K_i) \otimes F(K_j)$  ou issu de compositions entre plusieurs formes  $F(K_j)$ .

En effet, pour ces cas  $n_e$  serait composé de  $e_j$  et  $\bar{e}_j$ , ces éléments étant déjà présents dans l'ensemble  $G_{Fm}(\otimes)$  et alors  $n_e$  n'existerait pas à part entière dans l'ensemble.

**$CNn_{e1}$  :  $n_e$  doit être irréductible et la forme  $F(K_{n_e})$  doit être irréductible car ne peut être composée telle que  $e_i \otimes \bar{e}_i$  ou composée avec des formes  $F(K_j)$ .**

Reste à montrer qu'une forme  $F(K_{n_e})$  irréductible existe et montrer ainsi que  $n_e$  existe.

#### Conditions-F(K) :

**$CNkne_1$  : Choisir une valeur  $K_{n_e}$ , parmi les valeurs possibles de  $K$ , et différente des  $N$  valeurs  $K_i$  des formes  $F(K_i) = e_i \otimes \bar{e}_i$ .**

Ceci ne suffit pas pour déclarer la forme  $F(K_{n_e})$  comme irréductible.

**$CNkne_2$  : Il faut connaître l'expression de  $F(K_i)$  et comment évolue les valeurs de  $K_l$  pour les compositions**

$$F(K_l) = F(K_i) \otimes F(K_j).$$

Ainsi,

**$CNkne_3$  : Si l'on démontre que suivant les conditions nécessaires  $CNkne_1$  et  $CNkne_2$  des Conditions-F(K), on peut trouver au moins une valeur  $K_{n_e}$  telle que  $F(K_{n_e})$  soit irréductible, alors  $n_e$  existe et est irréductible :  $n_e = F(K_{n_e})$ .**

**$Int - n_e$  :** Pour la construction d'un groupe :

Il suffit alors d'intégrer  $n_e$  à la liste  $L_{irr}$ ,  $G_{Fm}(\otimes)$  est alors déclaré comme groupe.

**$Rech - K_{n_e}$  :** Pour un ensemble déjà construit :

Il faut trouver la valeur  $K_{n_e}$  pour déclarer cet ensemble comme groupe.

## 4 Exemple de groupe $G_{Fm}(\otimes)$ possédant des formes multiples de l'élément neutre : $Z_{Fm}(\oplus)$ :

( $Ce_1 - Ce_3$ ) Les éléments irréductibles de  $Z_{Fm}(\oplus)$  sont :

$L_{irr}$  :

$e_i$  : (1,2), (1,3), (1,5)

$\bar{e}_i$  : (2,1), (3,1), (5,1)

$n_e$  : (1,1) ou (2,2).

$e_i \oplus \bar{e}_i$  :

(1,2)  $\oplus$  (2,1) = (3,3) =  $F(3)$  =  $F(K_1)$

(1,3)  $\oplus$  (3,1) = (4,4) =  $F(4)$  =  $F(K_2)$

(1,5)  $\oplus$  (5,1) = (6,6) =  $F(6)$  =  $F(K_3)$

( $Cl_1$ ) La loi de composition  $\oplus$  est telle que  $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{N} > 0$ , la loi  $+$  est l'addition entre ces nombres.

( $Cl_2 - Cl_3$ ) La loi de composition  $\oplus$  est commutative et associative, propriétés héritées de la loi  $+$  entre les nombres naturels.

( $Cne_1 - Cne_2$ ) Pour tout  $K \in \mathbb{N} > 0$ , Une forme  $F(K)$  de l'élément neutre est  $F(K) = (K, K)$  ainsi toute forme  $F(K)$  correspond à l'élément neutre  $n_e$ .

L'élément symétrique doit être défini en même temps que  $F(K)$ .

( $Cs_1$ ) Pour un élément  $e_i = (a, b)$ , son symétrique est donc défini comme :  $\bar{e}_i = (b, a)$ , il est unique et  $e_i \oplus \bar{e}_i = (a+b, b+a) = F(a+b)$ .

( $Cs_1$ ) De plus les éléments  $e_i$  ne doivent pas être symétriques entre-eux, soit : si  $e_i = (a, b)$  et  $e_j = (c, d)$  alors  $e_i \oplus e_j$  ne peut être égal à une forme  $F(K)$ .

Dans ce cas  $(a+c, b+d) \neq (K, K)$  soit  $a-b \neq d-c$ . Ce qui est le cas dans notre exemple (2-1=1, 3-1=2, 5-1=4).

( $CNkne_3$ ) Recherche de la valeur  $K_{n_e}$  selon la condition  $CNkne_3$  :

1-d'après la condition nécessaire  $CNkne_1$  : la valeur  $K_{n_e}$  doit être différente des valeurs  $K_i$ , soit ici 3, 4 et 6.

2-d'après la condition nécessaire  $CNkne_2$  : à chaque composition entre formes :  $F(K_i) \oplus F(K_j) = F(K_i + K_j)$ , la valeur résultante est croissante.

Aussi la valeur  $K_{n_e}$  peut être inférieure à la plus petite des valeurs  $K_i$ , soit ici 2 ou 1 (<3).

La forme irréductible de  $n_e$  peut donc être  $F(1) = (1, 1)$ , ou  $F(2) = (2, 2)$ .

On peut aussi montrer que  $n_e = (1, 1)$  est irréductible car on ne peut avoir de composition  $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) = (1, 1)$  pour  $a, b, c, d > 0$ .

Des similitudes existent entre  $Z_{Fm}(\oplus)$  et celui des nombres relatifs  $\mathbb{Z}(+)$ . Ainsi pour un élément  $(n_1, p_1)$  de  $Z_{Fm}(\oplus)$ ,  $n_1$  est alors un nombre négatif,  $p_1$  nombre positif et à  $(n_1, p_1)$  correspond dans  $\mathbb{Z}(+)$  :  $-n_1 + p_1$ . Les formes  $F(1) = F(3) = F(4) = (1, 1) = (3, 3) = (4, 4)$  dans  $Z_{Fm}(\oplus)$  et dans  $\mathbb{Z}(+)$  :  $-1+1=-3+3=-4+4=0$ .

## 5 Caractéristiques des groupes $G(\otimes, N + N)$ :

Les groupes  $G(\otimes, N + N)$  ont les mêmes caractéristiques que les groupes  $G_{Fm}(\otimes)$  possédant des formes multiples de l'élément neutre  $n_e$ .

Les groupes  $G(\otimes, N + N)$  sont construits suivant la question posée par la conjecture et résumée ainsi : " $N + N = P_1 + P_2$  ?".

### 5.1 Éléments irréductibles :

Les éléments irréductibles de  $G(\otimes, N + N)$  reflètent les cas possibles de la conjecture pour un nombre pair  $N+N > 3$ .

( $Ce_1 - Ce_3$ ) Ces éléments sont écrits sous forme vectorielle :  $(n_i, n_j)$  et tels que  $n_i \in \mathbb{N}$ ,  $n_i + n_j = N + N$ ,  $n_i \geq 2$  et les  $n_i$  sont écrits comme produit de nombres premiers  $p_k$  :  $n_i = \prod_{k_i} p_{k_i}$  et  $n_j = \prod_{k_j} p_{k_j}$ .

Exemple : pour  $G(\otimes, 9 + 9)$  les éléments irréductibles sont :

( le caractère "." qui suit correspond à la multiplication entre entiers)

$$n_e = (9, 9) = (3.3, 3.3)$$

$$e_1 = (8, 10) = (2.2.2, 2.5) \text{ et } \bar{e}_1 = (10, 8) = (2.5, 2.2.2)$$

$$e_2 = (7, 11) = (7, 11) \text{ et } \bar{e}_2 = (11, 7) = (11, 7)$$

$$e_3 = (6, 12) = (2.3, 2.2.3) \text{ et } \bar{e}_3 = (12, 6) = (2.2.3, 2.3)$$

$$e_4 = (5, 13) = (5, 13) \text{ et } \bar{e}_4 = (13, 5) = (13, 5)$$

$$e_5 = (4, 14) = (2.2, 2.7) \text{ et } \bar{e}_5 = (14, 4) = (2.7, 2.2)$$

$$e_6 = (3, 15) = (3, 3.5) \text{ et } \bar{e}_6 = (15, 3) = (3.5, 3)$$

$$e_7 = (2, 16) = (2, 2.2.2.2) \text{ et } \bar{e}_7 = (16, 2) = (2.2.2.2, 2)$$

Par la suite la loi de composition interne de ce groupe est abordée. Alors tout élément résultant d'une composition entre 2 éléments irréductibles de  $G(\otimes, N + N)$ , est considéré comme appartenant à cet ensemble.

*Soient,  $e_1$  et  $e_2 \in G(\otimes, N + N)$  alors  $e_1 \otimes e_2 = e_{12} \in G(\otimes, N + N)$ .*

De même, soit un élément  $e_c$  que l'on peut écrire comme  $\sum_{\otimes k=} e_i$  avec  $e_i \in G(\otimes, N + N)$  alors  $e_c \in G(\otimes, N + N)$ . Le nombre d'éléments irréductibles est fini comme  $\mathbb{N}$ , aussi peut on écrire, construire, un algorithme qui s'arrête toujours après avoir trouvé les  $e_i$ .

Note : Ces ensembles  $G(\otimes, N + N)$  peuvent être vus comme des sous groupes d'un groupe qui n'est pas abordé dans ce document.

## 5.2 Loi de composition interne du groupe $G(\otimes, N + N)$ :

Soient  $e_1 = (n_{11}, n_{12}) \in G(\otimes, N + N)$ ,  $e_2 = (n_{21}, n_{22}) \in G(\otimes, N + N)$ , avec  $n_{..} \in \mathbb{N}$  et  $n_{11} + n_{12} = n_{21} + n_{22} = N + N$

(Cl<sub>1</sub>) Alors la loi interne  $\otimes$  est telle que  $e_1 \otimes e_2 = (n_{11}.n_{21}, n_{12}.n_{22}) = e_{12}$ .

( le caractère "." correspond à la multiplication entre entiers)

Si l'on écrit  $e_1$  et  $e_2$  comme le produit de nombres premiers alors

$$e_1 \otimes e_2 = (\prod_{k_{11}} p_{k_{11}} \cdot \prod_{k_{21}} p_{k_{21}} \cdot \prod_{k_{12}} p_{k_{12}} \cdot \prod_{k_{22}} p_{k_{22}})$$

(Cl<sub>4</sub>) la loi de composition  $\otimes$  est interne car  $e_{12}$  est composée à partir d'éléments irréductibles de  $G(\otimes, N + N)$ .

(Cl<sub>2</sub> – Cl<sub>3</sub>) la loi de composition  $\otimes$  est commutative et associative, ces propriétés étant héritées de la loi "." de la multiplication de nombres entiers.

Exemple : pour  $G(\otimes, 9 + 9)$  :

$$e_1 = (8, 10) = (2.2.2, 2.5)$$

$$e_2 = (4, 14) = (2.2, 2.7)$$

$$e_1 \otimes e_2 = (2.2.2.2.2, 2.5.2.7) = e_{12} = (32, 140)$$

(Cl<sub>4</sub>)  $e_{12} \in G(\otimes, 9 + 9)$  car il est composé de 2 éléments de  $G(\otimes, 9 + 9)$  et même si  $32+140$  n'est plus égal à  $9+9=18$ .

( $Cl_4 - Cl_6$ ) Si l'on ne connaît que  $e_{12} = (32, 140)$  on peut décomposer 32 et 140 en produit de nombres premiers : (2.2.2.2.2, 2.5.2.7) et connaissant la liste des éléments de irréductibles  $G(\otimes, 9 + 9)$ , on peut construire un algorithme qui permet de trouver  $e_1$  et  $e_2$  à l'origine de la composition et affirmer, dans notre cas, que  $e_{12} \in G(\otimes, 9 + 9)$  car exclusivement composé d'éléments de  $G(\otimes, 9 + 9)$ .

### 5.3 Elément symétrique et Elément neutre du groupe $G(\otimes, N + N)$ :

$\bar{e}_1$  : l'élément symétrique de  $e_1$  et l'élément neutre  $n_e$  sont très liés car par définition :  $e_1 \otimes \bar{e}_1 = n_e$ .

( $Cne_1 - Cne_2$ )

On définit alors l'élément neutre  $n_e$  comme :

$$n_e = (k, k) \text{ avec } k \in \mathbb{N} \text{ et } k \text{ différent de } 0 \text{ et } 1.$$

Ainsi  $n_e = F(K_{n_e})$  et  $F(K_{n_e})$  est appelée forme de l'élément neutre  $n_e$ .

Les autres formes de  $n_e$  sont obtenues pour chaque composition :

$$e_i \otimes \bar{e}_i = F(K_i) \text{ ou } e_j \otimes \bar{e}_j = F(K_j).$$

$F(K_i)$  et  $F(K_j)$  ont la même définition, la même valeur logique :

$$F(K_i) = F(K_j) = n_e.$$

( $Cs_1$ )

Et l'on définit l'élément symétrique  $\bar{e}_1$  de l'élément irréductible

$e_1 = (n_{11}, n_{12})$  de  $G(\otimes, N + N)$  comme :

$$\bar{e}_1 = (n_{12}, n_{11}) \text{ tel que } e_1 \otimes \bar{e}_1 = (n_{11}.n_{12}, n_{12}.n_{11}) = (m_1, m_1) = n_e \text{ avec } m_1 = n_{11}.n_{12} = n_{12}.n_{11} .$$

$\bar{e}_1$  est bien un élément irréductible de  $G(\otimes, N + N)$  car

$$n_{12} + n_{11} = n_{11} + n_{12} = N + N.$$

( $Cs_1$ )

$\bar{e}_1$  est bien unique, sinon soit  $\bar{e}_2 = (a_2, b_2)$  un autre élément irréductible et symétrique de  $e_1$  alors  $e_1 \otimes \bar{e}_2 = (n_{11}.a_2, n_{12}.b_2) = (m_2, m_2)$ ,

$$a_2 = n_{12}.b_2/n_{11} \text{ et } \in \mathbb{N} \text{ ce qui donne } b_2 = n_{11}.k, a_2 = n_{12}.k \text{ et donc}$$

$\bar{e}_2 = (n_{12}.k, n_{11}.k)$ , alors  $k.(n_{12} + n_{11}) = k.(N + N) = N + N$  car  $\bar{e}_2$  doit  $\in G(\otimes, N + N)$ , ce qui n'est vrai que pour  $k = 1$ , soit  $\bar{e}_2 = \bar{e}_1$ .

Pour un autre élément  $e_2 \otimes \bar{e}_2 = (m_2, m_2)$  avec  $m_2$  différent de  $m_1$ . Comme  $n_e$  est unique, on dit que les 2 couples :  $(m_1, m_1)$  et  $(m_2, m_2)$  sont des formes différentes de  $n_e$  l'élément neutre. Car elles ont la même valeur logique, la même définition que l'élément neutre.

Ainsi  $e_i \otimes \bar{e}_i = (m_i, m_i) = F_{(i,N)}$ , les  $F_{(i,N)}$  sont nommées formes multiples de l'élément neutre  $n_e$ .

( $Cl_5 - Cl_6$ ) Néanmoins pour une forme  $F_{(x,N)}$ , à priori non irréductible et pour laquelle on ne connaît pas sa composition, il faudra démontrer que sa composition est faite à partir d'éléments irréductibles de l'ensemble, pour la déclarer comme forme de l'élément neutre  $n_e$ .

#### 5.4 Conditions d'obtention de l'élément neutre $n_e$ et sa forme $F(K_{n_e})$ :

Les formes jusqu'ici abordées sont issues de la composition d'un élément  $e$  et son symétrique  $\bar{e}$ , il existe néanmoins une forme parmi les éléments irréductibles non issue de composition :  $(N, N)$ .

( $CNkne_3$ )

**C'est cette forme irréductible que l'on associe à  $n_e$  :**

$$n_e = (N, N) = F_{(0,9)}.$$

Ce choix est arbitraire car d'autres choix sont possibles.

( $CNkne_3$ )

**Autres possibilités de déclaration de l'élément neutre  $n_e$  :**

**on peut par exemple, déclarer, choisir  $n_e = (P_1^n, P_1^n)$  avec  $n \geq 1$  et  $P_1$  nombre premier supérieur au plus grand nombre premier rencontré lors de chaque décomposition des  $e_i$  en produit de nombres premiers.**

**Cette déclaration correspond bien à un élément irréductible car on ne peut obtenir  $n_e = e_i \otimes \bar{e}_i = (m_i, m_i) = F_{(i,N)} = (P_1^n, P_1^n)$  ou  $n_e = F_{(i,N)} \otimes F_{(j,N)}$  puisque  $m_k$  décomposé en produit de nombres premiers, ne contient pas  $P_1$ .**

**La seule différence est que  $P_1 + P_1 \neq N + N$ , ce qui ne pose pas de problème en soit.**

Exemple : Formes multiples de l'élément neutre pour  $G(\otimes, 9 + 9)$  :

$$F_{(0,9)} = (9, 9) = (3.3, 3.3)$$

$$F_{(1,9)} = (80, 80) = (\boxed{2}.2.2.2.\boxed{5}, 2.2.2.2.5) \text{ pour } (8, 10) \otimes (10, 8)$$

$$F_{(2,9)} = (77, 77) = (\boxed{7}.\boxed{11}, 7.11) \text{ pour } (7, 11) \otimes (11, 7)$$

$$F_{(3,9)} = (72, 72) = (2.\boxed{3}.2.2.3, 2.3.2.2.3) \text{ pour } (6, 12) \otimes (12, 6)$$

$$F_{(4,9)} = (65, 65) = (5, \boxed{13}, 13, 5) \text{ pour } (5, 13) \otimes (13, 5)$$

$$F_{(5,9)} = (56, 56) = (2.2.2.7, 2.2.2.7) \text{ pour } (4, 14) \otimes (14, 4)$$

$$F_{(6,9)} = (45, 45) = (3.3.5, 3.3.5) \text{ pour } (3, 15) \otimes (15, 3)$$

$$F_{(7,9)} = (32, 32) = (2.2.2.2.2, 2.2.2.2.2) \text{ pour } (2, 16) \otimes (16, 2)$$

**Le plus grand nombre premier rencontré lors de chaque décomposition des  $e_i$  en produit de nombres premiers est  $\boxed{13}$ .**

**Aussi peut on aussi choisir  $n_e = (17^n, 17^n)$ ,  $n \geq 1$ , car 17 nombre premier  $> 13$ .**

Pour le groupe  $G(\otimes, N + N)$  les formes multiples de l'élément neutre  $n_e$  sont :

$$F_{(i,N)} = ((N - i).(N + i), (N - i).(N + i)) = (N^2 - i^2, N^2 - i^2) \text{ pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N - 2$$

$$\text{Et } F_{(0,N)} = (N, N)$$

## 6 Morphisme de groupe entre $G(\otimes, N + N)$ et $Z(\oplus, N + N)$ :

Les éléments de l'ensemble  $Z(\oplus, N + N)$  :  $f(e_i)$ , sont les images de tous les éléments  $e_i \in L_{irr}$  ( $e_i$  au sens large :  $e_i$  ou  $\bar{e}_i$  ou  $n_e$ ) de  $G(\otimes, N + N)$  par une application  $f$  de  $G$  dans  $Z$  :  $G \xrightarrow{f} Z$ .

$$\text{Soit } e_i \in L_{irr} \text{ avec } e_i = (\prod_{k_i=1}^{k_i=n_{i,1}} p_{k_i}, \prod_{l_i=1}^{l_i=n_{i,2}} p_{l_i}).$$

$$e_i = (\text{Produit de } n_{i,1} \text{ nombres premiers } p_{k_i}, \text{Produit de } n_{i,2} \text{ nombres premiers } p_{l_i}).$$

Alors :

$$\Rightarrow f(e_i) = (n_{i,1}, n_{i,2}).$$

$$\Rightarrow f(e_i) \oplus f(e_j) = (n_{i,1}, n_{i,2}) \oplus (n_{j,1}, n_{j,2}) = (n_{i,1} + n_{j,1}, n_{i,2} + n_{j,2}).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(e_i \otimes e_j) &= f((\prod_{k_i=1}^{k_i=n_{i,1}} p_{k_i}) \cdot (\prod_{k_j=1}^{k_j=n_{j,1}} p_{k_j}), (\prod_{l_i=1}^{l_i=n_{i,2}} p_{l_i}) \cdot (\prod_{l_j=1}^{l_j=n_{j,2}} p_{l_j})). \\ f(e_i \otimes e_j) &= f(\prod_{k_{ij}=1}^{k_{ij}=n_{i,1}+n_{j,1}} p_{k_{ij}}, \prod_{l_{ij}=1}^{l_{ij}=n_{i,2}+n_{j,2}} p_{l_{ij}}) \\ &= (n_{i,1} + n_{j,1}, n_{i,2} + n_{j,2}). \end{aligned}$$

**6.1 Application  $G \xrightarrow{f} Z$  telle que :  $f(e_i \otimes e_j) = f(e_i) \oplus f(e_j)$**

$$\boxed{\Rightarrow f(e_i \otimes e_j) = f(e_i) \oplus f(e_j)}$$

Exemple : pour  $G(\otimes, 9 + 9)$  :

$$e_1 = (8, 10) = (2.2.2, 2.5) \Rightarrow f(e_1) = (3, 2).$$

$$e_2 = (4, 14) = (2.2, 2.7) \Rightarrow f(e_2) = (2, 2).$$

$$e_1 \otimes e_2 = (2.2.2.2.2, 2.5.2.7) \Rightarrow f(e_1 \otimes e_2) = (5, 4) = f(e_1) \oplus f(e_2) = (3 + 2, 2 + 2).$$

**6.2 Formes multiples de l'élément neutre :  $F_z(K_i) = (K_i, K_i)$ .**

$$\begin{aligned} \text{Si } f(e_i) &= (n_{i,1}, n_{i,2}), \text{ alors } f(\bar{e}_i) = (n_{i,2}, n_{i,1}), \\ f(e_i \otimes \bar{e}_i) &= f(e_i) \oplus f(\bar{e}_i) = (n_{i,1} + n_{i,2}, n_{i,1} + n_{i,2}) = (K_i, K_i) = F_z(K_i), \\ f(e_i \otimes \bar{e}_i) &= f(F_{(i,N)}). \end{aligned}$$

Ainsi à chaque forme multiple de l'élément neutre de  $G(\otimes, N + N) : F_{(i,N)}$ , correspond une forme multiple de l'élément neutre de  $Z(\oplus, N + N)$  :

$$F_z(K_i) = (K_i, K_i), \text{ avec } K_i \in \mathbb{N} > 1.$$

L'élément neutre retenu pour  $G(\otimes, N + N)$  :

$$\begin{aligned} n_e &= F_{(0,N)} = (N, N) = (\prod_{k=1}^{k=n_{0,e}} p_k, \prod_{k=1}^{k=n_{0,e}} p_k), \\ \text{aussi } f(n_e) &= (n_{0,e}, n_{0,e}) = F_z(n_{0,e}) = F_z(K_{0,e}), (K_{0,e} = n_{0,e}). \end{aligned}$$

**6.3 Analyse de la structure de  $Z(\oplus, N + N)$ .**

Rappel : Les éléments de l'ensemble  $Z(\oplus, N + N) : f(e_i)$ , sont les images de tous les éléments  $e_i \in L_{irr}$  ( $e_i$  au sens large :  $e_i$  ou  $\bar{e}_i$  ou  $n_e$ ) de  $G(\otimes, N + N)$  par une application  $f$  de  $G$  dans  $Z : G \xrightarrow{f} Z$ .

Notation utilisée ultérieurement :

$Z^*(\oplus, N + N)$  ou  $Z^*$ , correspond à l'ensemble dont la liste des éléments est :  $L_{irr} = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_{N-2}), f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), \dots, f(\bar{e}_{N-2}))$ .

$Z(\oplus, N + N)$  ou  $Z$ , correspond à l'ensemble dont la liste des éléments est :  $L_{irr} = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_{N-2}), f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), \dots, f(\bar{e}_{N-2}), \boxed{f(n_e)})$ .

Pour déclarer  $Z$  comme groupe, il doit exister dans  $Z$ , un unique élément neutre  $n_{e,z} = (K_{n_{e,z}}, K_{n_{e,z}})$  (soit une forme avec la valeur  $K_{n_{e,z}}$ ), cet élément neutre doit aussi être irréductible.

Les éléments  $f(e_i)$  sont, soit  $f(e_i) = (a, b)$  avec  $a$  différent de  $b$ , soit  $f(e_i) = (c, c)$ .

Calculons toutes les formes  $F(K_i) = (K_i, K_i)$  issues de  $f(e_i) \oplus f(\bar{e}_i)$ .

Recherche de la valeur  $K_{n_{e,z}}$  selon la condition  $CNkne_3$  :

1-d'après la condition nécessaire  $CNkne_1$  : la valeur  $K_{n_{e,z}}$  doit être différente des valeurs  $K_i$ .

2-d'après la condition nécessaire  $CNkne_2$  : à chaque composition entre formes :  $F(K_i) \oplus F(K_j) = F(K_i + K_j)$ , la valeur résultante est croissante.  
 La valeur  $K_{n_e,z}$  doit être inférieure à la plus petite des valeurs  $K_i$  et la valeur de la forme de  $f(n_e) = (n, n)$ .

Si  $K_{n_e,z}$  existe alors  $Z$  est un groupe, sinon  $Z$  n'est pas un groupe.

Si  $Z$  est un groupe, alors il a toutes les caractéristiques des groupes  $G_{Fm}(\otimes)$  possédant des formes multiples de l'élément neutre  $n_e$ .

#### 6.4 Groupe $Z_{+/-}(\oplus)$ .

Les éléments de  $Z_{+/-}$  sont tous les couples (a,b) avec a et b appartenant à l'ensemble des nombres naturels et  $> 0$ .

Il existe une loi de composition interne  $\oplus$ , la même que pour  $Z$ .

Ainsi, soient deux éléments de  $Z_{+/-}$  :  $e_i = (a, b)$  et  $e_j = (c, d)$  alors  $e_i \oplus e_j = (a + c, b + d)$ .

La loi est associative, chaque élément (a,b) possède un symétrique (b,a).

L'élément neutre est (1,1) et possède des formes multiples (k,k).

$Z_{+/-}(\oplus)$  est alors un groupe.

Et  $Z$  est un sous ensemble de  $Z_{+/-}$ .

#### 6.5 Morphisme de groupe entre $G(\otimes, N + N)$ et $Z_{+/-}(\oplus)$ :

Si l'on considère l'application  $f : G \longrightarrow^f Z_{+/-}$  alors c'est un morphisme de groupe entre  $G$  et  $Z_{+/-}$ .

Pour un morphisme de groupes, une des propriétés est que l'image de l'élément neutre de  $G$  est l'élément neutre de  $Z_{+/-}$ .

Ainsi  $f(n_e) = (1, 1)$ . Ceci selon le point de vue logique car en fait  $f(n_e) = (n, n)$  et est une forme de l'élément neutre (1, 1) de  $Z_{+/-}$  et correspond bien, du point de vue logique, à l'élément neutre (CAS1).

Pour l'application  $f : G \longrightarrow^f Z$ ,  $Z$  est un sous ensemble de  $Z_{+/-}$  et, selon la sous-section précédente : "Analyse de la structure de  $Z(\oplus, N + N)$ " :  $Z$  peut ne pas être un groupe, et alors  $f(n_e)$  n'est pas une forme d'un élément neutre, n'est pas du point de vue logique, un élément neutre.

Ceci est contradictoire avec le CAS1, aussi ce cas ne peut exister.

$Z$  est donc un groupe et ceci quelque soit la forme  $f(n_e) = (n, n)$ , quelque soit n.

En effet l'élément neutre  $n_e$  est un choix arbitraire comme ceci a été vu à la sous-section "Elément symétrique et Elément neutre du groupe  $G(\otimes, N + N)$  (5.4)" ( $n_e = (P_1^n, P_1^n)$  avec  $n \geq 1$  et  $P_1$  nombre premier....).

Aussi l'élément  $f(n_e) = (n, n)$  ne peut influencer sur la structure de  $Z$ .

Ceci est faux si  $Z^*$  n'est pas un groupe.

En effet choisir  $f(n_e) = (1, 1)$  permet d'obtenir  $Z$  avec la structure de groupe quelque soit la structure de  $Z^*$  ;

et pour d'autres valeurs de  $(n, n)$  permet d'obtenir  $Z$  comme non groupe.

$Z^*$  est donc un groupe,

alors il existe une forme  $(k, k)$  irréductible pour l'élément neutre de  $Z$  :  $n_{e,z}$ .

alors quelque soit  $n \geq 1$ ,  $(n, n) = (k.m, k.m)$  ( $m-1$ ) composition de l'élément neutre, la seule solution est  $k=1$  et  $m=n$ .

Ainsi l'élément neutre de  $Z$  est  $n_{e,z} = (1, 1)$

## 7 Fin de la démonstration :

$\Rightarrow$  Ainsi  $n_{e,z} = (1, 1)$ .

Alors  $f(n_e) = (n, n) = (1, 1) \oplus (1, 1) \oplus \dots \oplus (1, 1)$  : ( $n-1$ ) compositions  $\oplus$  de l'élément neutre  $n_{e,z} = (1, 1)$ .

$f(n_e)$  n'existe donc pas comme élément irréductible car "multiple  $\oplus$ " de  $(1, 1)$ .

L'élément neutre de  $Z(\oplus, N + N)$  est  $n_{e,z} = (1, 1) = f(e_k) = f((P_i, P_j))$  avec  $P_i$  et  $P_j$  des nombres premiers.

L'ensemble  $Z^*$  est un groupe comme l'ensemble  $Z$  et l'application  $f$  de  $G$  dans  $Z$  :  $G \xrightarrow{f} Z$  correspond bien à un morphisme de groupe entre  $G(\otimes, N + N)$  et  $Z(\oplus, N + N)$

$\Rightarrow$  il existe au moins un élément  $e_k$  de  $G(\otimes, N + N)$  ( $N > 3$ ) tel que  $e_k = (P_i, P_j)$ ,

$\Rightarrow$  avec  $P_i$  et  $P_j$  des nombres premiers.

## 8 Exemple : Application au groupe $G(\otimes, 9 + 9)$ :

Ce paragraphe ne sert qu'à illustrer les résultats obtenues sur un groupe particulier :  $G(\otimes, 9 + 9)$ .

### 8.1 Liste des $f(e_i)$ et $F_z(K_i)$ pour $G(\otimes, 9 + 9)$ :

( le caractère "." qui suit correspond à la multiplication entre entiers)

$$f(n_e) = f((9, 9)) = f((3.3, 3.3)) = (2, 2)$$

$$F_z(K_{0,e}) = (2, 2)$$

$$f(e_1) = f((8, 10)) = f((2.2.2, 2.5)) = (3, 2) \text{ et } f(\overline{e_1}) = f((10, 8)) = (2, 3)$$

$$f(e_1) \oplus f(\overline{e_1}) = F_z(5) = (5, 5)$$

$$f(e_2) = f((7, 11)) = (1, 1) \text{ et } f(\overline{e_2}) = f((11, 7)) = (1, 1)$$

$$f(e_2) \oplus f(\overline{e_2}) = F_z(2) = (2, 2)$$

$$f(e_3) = f((6, 12)) = f((2.3, 2.2.3)) = (2, 3) \text{ et } f(\overline{e_3}) = f((12, 6)) = (3, 2)$$

$$f(e_3) \oplus f(\overline{e_3}) = F_z(5) = (5, 5)$$

$$f(e_4) = f((5, 13)) = (1, 1) \text{ et } f(\overline{e_4}) = f((13, 5)) = (1, 1)$$

$$f(e_4) \oplus f(\overline{e_4}) = F_z(2) = (2, 2)$$

$$f(e_5) = f((4, 14)) = f((2.2, 2.7)) = (2, 2) \text{ et } f(\overline{e_5}) = f((14, 4)) = (2, 2)$$

$$f(e_5) \oplus f(\overline{e_5}) = F_z(4) = (4, 4)$$

$$f(e_6) = f((3, 15)) = f((3, 3.5)) = (1, 2) \text{ et } f(\overline{e_6}) = f((15, 3)) = (2, 1)$$

$$f(e_6) \oplus f(\overline{e_6}) = F_z(3) = (3, 3)$$

$$f(e_7) = f((2, 16)) = f((2, 2.2.2.2)) = (1, 4) \text{ et } f(\overline{e_7}) = f((16, 2)) = (4, 1)$$

$$f(e_7) \oplus f(\overline{e_7}) = F_z(5) = (5, 5)$$

### 8.2 Éléments distincts $e_{i,z}$ de $Z(\oplus, 9 + 9)$ :

$f(n_e) = (2, 2) = F_z(2)$ , élément que l'on garde qu'il soit ou non distinct des autres éléments.

$$e_{1,z} = (3, 2) \text{ et } \overline{e_{1,z}} = (2, 3), e_{1,z} \oplus \overline{e_{1,z}} = F_z(5),$$

$$e_{2,z} = (1, 2) \text{ et } \overline{e_{2,z}} = (2, 1), e_{2,z} \oplus \overline{e_{2,z}} = F_z(3),$$

$$e_{3,z} = (1, 4) \text{ et } \overline{e_{3,z}} = (4, 1), e_{3,z} \oplus \overline{e_{3,z}} = F_z(5),$$

$$e_{4,z} = (1, 1) = F_z(1).$$

( et  $(2, 2)$  qui n'est pas irréductible car composé avec  $(1, 1)$  :

$$(2, 2) = (1, 1) \oplus (1, 1) ).$$

**9 Fin du document : le 18 juin 2026**

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction sur la conjecture de Goldbach et objet du document :</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Résumé de chaque section de ce document :</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Caractéristiques des groupes <math>G_{Fm}(\otimes)</math> possédant des formes multiples de l'élément neutre <math>n_e</math> :</b>	<b>3</b>
3.1	Eléments irréductibles : . . . . .	3
3.2	Loi de composition interne $\otimes$ : . . . . .	3
3.3	Elément neutre $n_e$ du groupe $G_{Fm}(\otimes)$ - Élément symétrique $\bar{e}_i$ de l'élément $e_i$ : . . . . .	5
3.4	Conditions d'obtention de l'élément neutre $n_e$ et sa forme $F(K_{ne})$ : . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Exemple de groupe <math>G_{Fm}(\otimes)</math> possédant des formes multiples de l'élément neutre : <math>Z_{Fm}(\oplus)</math> :</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Caractéristiques des groupes <math>G(\otimes, N + N)</math> :</b>	<b>8</b>
5.1	Eléments irréductibles : . . . . .	8
5.2	Loi de composition interne du groupe $G(\otimes, N + N)$ : . . . . .	9
5.3	Elément symétrique et Élément neutre du groupe $G(\otimes, N + N)$ : . . . . .	10
5.4	Conditions d'obtention de l'élément neutre $n_e$ et sa forme $F(K_{ne})$ : . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Morphisme de groupe entre <math>G(\otimes, N + N)</math> et <math>Z(\oplus, N + N)</math> :</b>	<b>12</b>
6.1	Application $G \xrightarrow{f} Z$ telle que : $f(e_i \otimes e_j) = f(e_i) \oplus f(e_j)$ . . . . .	13
6.2	Formes multiples de l'élément neutre : $F_z(K_i) = (K_i, K_i)$ . . . . .	13
6.3	Analyse de la structure de $Z(\oplus, N + N)$ . . . . .	13
6.4	Groupe $Z_{+/-}(\oplus)$ . . . . .	14
6.5	Morphisme de groupe entre $G(\otimes, N + N)$ et $Z_{+/-}(\oplus)$ : . . . . .	14
<b>7</b>	<b>Fin de la démonstration :</b>	<b>15</b>
<b>8</b>	<b>Exemple : Application au groupe <math>G(\otimes, 9 + 9)</math> :</b>	<b>16</b>
8.1	Liste des $f(e_i)$ et $F_z(K_i)$ pour $G(\otimes, 9 + 9)$ : . . . . .	16
8.2	Eléments distincts $e_{i,z}$ de $Z(\oplus, 9 + 9)$ : . . . . .	16
<b>9</b>	<b>Fin du document : le 18 juin 2026</b>	<b>17</b>