Exercice 3 (Equivalences de distances) Soit E un ensemble. Deux distances δ et d sur E sont dites (fortement) équivalentes s'il existe dans $\mathbb{R}_+^*$ des réels c et C tels que $c\delta \leqslant d \leqslant C\delta$; si elles engendrent les mêmes ouverts, elles sont dites topologiquement équivalentes.

a) Prouver que deux distances (fortement) équivalentes sont topologiquement équivalentes(2).

b) Prouver que si d_1 et d_2 sont deux distances sur E, $d_0 = d_1 + d_2$ et $d_\infty = \sup(d_1, d_2)$ sont des distances sur E topologiquement équivalentes.

c) Soient I un intervalle ouvert borné non vide de $\mathbb{R}$, φ une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur I. Etablir que $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto |\varphi(x) - \varphi(y)|$ est une distance sur $\mathbb{R}$ qui est topologiquement équivalente à la distance usuelle d de $\mathbb{R}$. δ et d sont elles (fortement) équivalentes ? Donner un exemple explicite pour φ.

Exercice 3 (Equivalences de distances) **a)** Supposons que δ et d sont deux distances (fortement) équivalentes sur E. Soient c et C dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $c\delta \leqslant d \leqslant C\delta$. L'inégalité $c\delta \leqslant d$ implique que pour tout $(a, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$, $B_d(a, r) \subset B_\delta(a, r/c)$ et donc que la topologie τ_δ associée à δ est contenue dans celle τ_d associée à d : si $U \in \tau_\delta$ et si $a \in U$, il existe $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B_\delta(a, \rho) \subset U$ et donc tel que $B_d(a, c\rho) \subset U$. De même l'inégalité $d \leqslant C\delta$ implique que $\tau_d \subset \tau_\delta$. D'où $\tau_d = \tau_\delta$.

b) Que d_1 et d_2 soient des distances sur E est évident et qu'elle soient topologiquement équivalentes résultent de ce que $d_0 \leqslant d_1 \leqslant 2d_0$.

c) δ est évidemment une application symétrique de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$. L'injectivité de φ se traduit par le fait que δ ne s'annule que sur la diagonale de $\mathbb{R}^2$. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, $\delta(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant d(\varphi(x), \varphi(z)) + d(\varphi(z), \varphi(y)) = \delta(x, z) + \delta(y, z)$. δ est donc une distance sur $\mathbb{R}$.

Notons τ_δ la topologie associée à δ et τ celle usuelle de $\mathbb{R}$. On sait d'après un théorème plus que classique que φ est continue. Si $U \in \tau_\delta$ et si $x \in U$, il existe donc $r > 0$ tel que $B_\delta(x, r) \subset U$. Or $B_\delta(x, r) = \{y \in \mathbb{R};\ \varphi(y) \in B_d(\varphi(x), r)\} = \varphi^{-1}[B_d(\varphi(x), r)]$ de sorte que la continuité de φ en x entraîne que $B_\delta(x, r)$, et a fortiori U, est un voisinage de x dans $(\mathbb{R}, \tau)$. Ainsi $\tau_\delta \subset \tau$. Pour l'inclusion inverse, il suffit de remarquer que pour tout $x', y' \in I$, $d(x', y') = \delta(\psi(x'), \psi(y'))$ où ψ est l'application réciproque de φ ; un raisonnement similaire à ce qui précède donne que $\tau \subset \tau_\delta$.