Devoir en temps libre n° 7

Calcul différentiel discret

A rendre le jeudi 3 novembre

PROBLÈME 1

Soit E l'ensemble des suites $E = \mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$. On considère les applications $\Delta : E \to E$ appelée *dérivée discrète* et $\tau : E \to E$ appelée *décalage (de Bernoulli)* définies pour tout $x \in \mathbf{N}$ par

$$\begin{cases} (\Delta f)(x) &= f(x+1) - f(x) \\ (\tau f)(x) &= f(x+1). \end{cases}$$

On définit pour tous $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\begin{array}{rcll} (f+g)(x) &=& f(x)+g(x) & \text{addition des suites} \\ (\lambda f)(x) &=& \lambda f(x) & \text{multiplication externe} \\ (fg)(x) &=& f(x)g(x) & \text{multiplication interne.} \end{array}$$

Partie A

1. Montrer que E muni de l'addition des suites et de la multiplication externe est un espace vectoriel. Étudier les propriétés de la multiplication interne. En particulier, est-il vrai que si $fg = 0$ alors $f = 0$ ou $g = 0$?
2. Montrer que pour tous $f, g \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, on a $\Delta(\lambda f + \mu g) = \lambda \Delta f + \mu \Delta g$ et $\tau(\lambda f + \mu g) = \lambda \tau f + \mu \tau g$. On dit que Δ et τ sont *linéaires*.
3. Déterminer l'image réciproque de $\{0\}$ par Δ et τ. On parle du *noyau* de Δ et de τ.
4. Etudier la distributivité de $\circ$ par rapport à $+$ dans l'expression $\Delta \circ (\tau - \mathrm{Id}_E)$. Exprimer Δ en fonction de τ et Id_E et en déduire la formule de Leibniz :

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$

   où Δ^n désigne la composée de Δ avec elle-même n fois.
5. Montrer que f est croissante (resp. strictement croissante) si et seulement si $\Delta f \geq 0$ (resp. $\Delta f > 0$).
6. Calculer $\Delta(x)$, $\Delta(x^2)$, $\Delta(x^3)$ et pour $k \in \mathbf{N}$ exprimer $\Delta(x^k)$ sous forme de somme.
7. Démontrer la formule de dérivation d'un produit :

$$\Delta(fg) = (\Delta f)\tau g + f(\Delta g).$$

8. Énoncer et démontrer la formule de dérivation d'un quotient.

Partie B

On appelle *primitive* de $f \in E$ toute suite $g \in E$ telle que $\Delta g = f$. On note $\sum f(x)\delta x$ une primitive de g.

1. Montrer que si g_1 et g_2 sont deux primitives de f, il existe un nombre réel c tel que $g_1 = g_2 + c$.
2. Soit $f \in E$ et a, b deux entiers naturels. On définit l'*intégrale* de f entre a et b par

$$\begin{cases} \sum_a^b f & = & \sum_a^b f(x)\delta x & = & \sum_{a \le x < b} f(x) & \text{si } a < b \\ \sum_a^b f & = & \sum_a^b f(x)\delta x & = & 0 & \text{si } a = b \\ \sum_a^b f & = & \sum_a^b f(x)\delta x & = & -\sum_{b \le x < a} f(x) & \text{si } a > b \end{cases}.$$

   Montrer que la suite $x \mapsto \sum_a^x f$ est une primitive de f, puis démontrer la formule d'intégration par parties

$$\sum_a^b u\Delta v = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \sum_a^b (\Delta u)\tau v.$$

Partie C

Soit $m \in \mathbf{Z}$. Pour tout entier naturel x, on appelle m^e puissance descendante de x, noté $x^{\underline{m}}$ le produit

$$\begin{cases} x^{\underline{m}} & = & x(x-1)\cdots(x-m+2)(x-m+1) & \text{si } m \in \mathbf{N} \\ x^{\underline{m}} & = & \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x-m-1)(x-m)} & \text{si } m < 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que pour tous les entiers naturels m et n

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}.$$

2. Montrer que pour tout entier $m \in \mathbf{Z}$,

$$\Delta x^{\underline{m}} = m x^{\underline{m-1}} \qquad \text{et} \qquad \Delta \binom{x}{m} = \binom{x}{m-1}.$$

3. Montrer que pour tout entier $m \in \mathbf{N}$

$$(x+y)^{\underline{m}} = \sum_{0 \le k \le m} \binom{m}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{m-k}}.$$

Partie D

1. Calculer les primitives de $x^{\underline{m}}$ pour $m \neq -1$.
2. Soit $H_x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$. Ces nombres s'appellent les nombres harmoniques. Montrer que H est une primitive de $x^{\underline{-1}}$.
3. Exprimer k^2, k^3, k^4 comme combinaison linéaire de $k^{\underline{1}}$, $k^{\underline{2}}$, $k^{\underline{3}}$ et $k^{\underline{4}}$. En déduire une expression de $\sum_{a \le k \le b} k^2$, $\sum_{a \le k \le b} k^3$ et $\sum_{a \le k \le b} k^4$.

4. Résoudre l'équation différentielle $\Delta f = f$ puis $\Delta f = (\lambda - 1) f$ où $\lambda \in \mathbf{R}$. En déduire une nouvelle preuve que pour $\lambda \neq 1$

$$\sum_{a \leq k < b} \lambda^k = \frac{\lambda^b - \lambda^a}{\lambda - 1}.$$

5. Calculer $\sum_{a \leq k \leq b} k 2^k$ en intégrant par parties. De même, calculer $\sum_{a \leq k \leq b} k^2 2^k$ et $\sum_{a \leq k \leq b} k H_k$.
6. Montrer que pour m et x entiers naturels

$$\sum_{0 \leq k \leq m} \binom{m}{k} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{1}{x \binom{x+m}{m}}.$$

Indication : utiliser $\Delta^n((x-1)^{-1})$.
7. En déduire la formule

$$\binom{m}{1} - \frac{1}{2}\binom{m}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{m}\binom{m}{m} = H_m.$$

8. (Facultatif) Reprendre les exercices de combinatoire de la feuille d'exercice et utiliser vos nouvelles conaissances.

PROBLÈME 2

Le plan complexe est muni de son produit scalaire et de son orientation usuelle.

Soit $n \geq 3$ un entier. Soit ω le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Un *polygône* à n cotés (ou tout simplement polygône si n est sous-entendu) est un n-uplet $Z = (z_0, z_1, \ldots z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On convient que $z_n = z_0$. Le polygône Z est *équilatéral* si $|z_{j+1} - z_j|$ ne dépend pas de j. Il est *régulier* s'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbf{C}$ tels que : pour tout k, $z_k = a\omega^k + b$ ou pour tout k, $z_k = a\overline{\omega}^k + b$. Le conjugué de Z est le polygône $\overline{Z} = (\overline{z}_0, \overline{z}_1, \ldots \overline{z}_{n-1})$. Si $c \in \mathbf{C}$, on définit le translaté de Z par c comme le polygône $Z + c = (z_0 + c, z_1 + c, \ldots, z_{n-1} + c)$. Enfin on pose

$$\widehat{z}_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\overline{\omega}^j\right)^k z_k.$$

En particulier, $\widehat{z}_n = \widehat{z}_0$.

On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbf{R}^n$: pour $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans $\mathbf{R}^n$, on a $\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ avec égalité si et seulement si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont proportionnels.

Partie I : calculs préliminaires

1. Un polygône régulier est-il équilatéral ? Donner un exemple de polygône équilatéral non régulier.
2. Montrer qu'un polygône régulier est inscrit dans un cercle dont on donnera le centre et le rayon en fonction de a et b.

3. Soit $p \in \mathbf{Z}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k$.
4. Montrer que si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, l'aire algébrique du triangle $(0, z_1, z_2)$ vaut $\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\overline{z_1} z_2)$.
5. Soit $Z = (z_0, z_1, \ldots z_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$. Vérifier que $z_j = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^j\right)^k \widehat{z}_k$.

Partie II : l'inégalité isopérimétrique

On définit pour tout polygône $Z = (z_0, z_1, \ldots z_{n-1})$:

$$L(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|,\ E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|^2,\ A(Z) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}\overline{z}_k\right).$$

On dit que Z *n'est pas réduit à un point* s'il existe i, j avec $0 \leq i < j \leq n-1$ tels que $z_i \neq z_j$.

1. (a) Interpréter géométriquement les quantités $L(Z)$ et $A(Z)$.
   La quantité $E(Z)$ peut se voir comme «l'énergie» du système.
   (b) Exprimer $A(\overline{Z})$ et $A(Z+c)$ en fonction de $A(Z)$.
2. Calculer $L(Z)$, $E(Z)$ et $|A(Z)|$ lorsque Z est un polygône régulier. On exprimera le résultat en fonction de $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ ou $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. En déduire dans ce cas les rapports $\dfrac{|A(Z)|}{L(Z)^2}, \dfrac{|A(Z)|}{E(Z)}$ et $\dfrac{L(Z)^2}{E(Z)}$ lorsque Z est non réduit à un point.
   L'objectif de ce problême est de montrer que ces rapports sont maximaux.
3. Montrer que pour tout polygône $Z \in \mathbf{C}^n$, $L(Z)^2 \leq nE(Z)$. A quelle condition sur Z a-t-on égalité ?
4. (a) Établir les relations

   $$A(Z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) |\widehat{z}_k|^2 \text{ et } E(Z) = 4\sum_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) |\widehat{z}_k|^2.$$

   (b) Montrer que $E(Z) - 4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)A(Z)$ est égal à

   $$4\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left[\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right] |\widehat{z}_k|^2.$$

   En déduire la majoration cherchée de $\frac{|A(Z)|}{E(Z)}$. Montrer que l'égalité de produit si et seulement si Z est régulier non réduit à un point.
5. On admet qu'il existe Z_0 non réduit à un point tel que pour tout $Z \in \mathbf{C}^n$ non réduit à un point, $\frac{|A(Z)|}{L(Z)^2} \leq \frac{|A(Z_0)|}{L(Z_0)^2}$. On pose $\alpha = \frac{|A(Z_0)|}{L(Z_0)^2}$.
   (a) Montrer que Z_0 est équilatéral. (Indication : on pourra «déplacer» z_j parallèlement à $z_{j+1} - z_{j-1}$ pour établir $|z_j - z_{j-1}| = |z_{j+1} - z_j|$.)
   (b) En déduire la valeur de α et les Z pour lequel ce maximum est atteint.