Exercice:

Soit $\mathcal{M}=(IR, \mathcal{B}(IR), \Pi)$ un modèle statistique tel que $\Pi=\{\delta_\theta , \theta\in IR\}$
montrer que le modèle n'est pas dominé.

Preuve:

Supposons que le modèle est dominé alors :

1) il existe μ une mesure positive σ–fini telle que: $\forall\theta\in IR\ \delta_\theta << \mu$ donc
$\forall\theta\in IR\ \forall x\in IR\ \ \mu(\{x\})=0 \Rightarrow \delta_\theta (\{x\})=0 \Leftrightarrow \forall\theta\in IR\ \forall x\in IR\ \ \delta_\theta (\{x\})\neq 0 \Rightarrow \mu(\{x\})\neq 0$
donc $\forall x\in IR\ \delta_x (\{x\})=1 \Rightarrow \mu(\{x\})>0$.

2) la mesure μ est σ–fini alors il existe $(\psi_n)_{n\in IN}$ famille de borélien tel que:
$IR=\cup_{n\in IN} \psi_n$

on pose $\forall n\in IN\ \ \psi_{n,m}=\{x\in \psi_n \ ;\ \mu(\{x\})>1/m\}$
et on a $\forall n\in IN\ \ \psi_n = \cup_m \psi_{n,m}$

3) soit $(n,m)\in IN^2$ on a $\mathrm{Card}(\psi_{n,m}) \leq m\mu(\psi_n) < \infty$ (POURQUOI COMMENT ?????????)

4) puisque $IR=\cup_{n\in IN}\cup_{m\in IN} \psi_{n,m}$ alors IR est union dénombrable d'union dénombrable d'ensemble fini donc IR au plus dénombrable ce qui est absurde.

5)*Conclusion* : $\mathcal{M}$ n'est pas un modèle dominé.