Lycée Jean Perrin
Classe de $TSI_1$ 2006/2007 — À rendre pour le Mardi 14/11/06

# Devoir en temps libre n°2 de Mathématiques

(A chercher et à remettre en binôme)

**Problème** (Exemples d'équations différentielles du premier ordre non linéaires)**.** Le but de ce problème est d'étudier les méthodes permettant de déterminer certaines solutions d'équations non linéaires. Il faut prendre garde au fait que ces solutions ne sont généralement pas définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais sur des intervalles de $\mathbb{R}$ (à préciser) et que contrairement aux équations linéaires, même une condition initiale ne garantit pas l'unicité de la solution. De plus :

- Lorsqu'on recherchera une solution, on sera parfois amené à préciser des conditions du type "on suppose que la solution $y$ ne s'annule pas sur l'intervalle $I$ sur lequel elle est définie".
- Lorsqu'on proposera une solution, on *pensera bien à vérifier* que, réciproquement, celle-ci satisfait bien l'équation.

1. *Équations à variables séparables.* On appelle ainsi les équations qui peuvent se mettre sous la forme :
$$y'(t)f\big(y(t)\big) = g(t) \tag{1}$$
où $f$ et $g$ sont deux fonctions à valeurs réelles. On peut alors intégrer les deux membres de l'égalité par rapport à $t$, puis exprimer $y$ en fonction de $t$. Appliquer cette méthode pour déterminer des solutions des équations suivantes avec les conditions initiales proposées, sur les intervalles $I_1$ et $I_2$ les plus grands possibles (à préciser) :
$$(\mathcal{E}_1) : \begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{E}_2) : \begin{cases} y' = ty^2 \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

2. *Équations homogènes résolues.* On appelle ainsi les équations qui peuvent se mettre sous la forme :
$$y'(t) = \varphi\left(\frac{y(t)}{t}\right) \tag{2}$$
où $\varphi$ est une fonction à valeurs réelles.
   (a) Montrer que si $y$ est une solution de (2), alors la fonction $z$ définie par $z(t) = \frac{y(t)}{t}$ satisfait une équation à variables séparables (1) que l'on précisera (c'est à dire qu'on donnera $f$ en fonction de $\varphi$).
   (b) En déduire une solution, sur un intervalle $I_3$ le plus grand possible à préciser, de l'équation :
$$(\mathcal{E}_3) : \begin{cases} t^2y' - y^2 = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$
   Indication : Au cours des calculs, on pourra exprimer $\frac{1}{z(z-1)}$ sous la forme $\frac{a}{z-1} + \frac{b}{z}$.

3. *Équations de Bernoulli.* On appelle ainsi les équations du type :
$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t)^{\alpha} \tag{3}$$
où $a$ et $b$ sont deux fonctions à valeurs réelles. On remarque que les cas $\alpha \in \{0, 1\}$ donnent des équations linéaires du premier ordre. On cherche des solutions de (3) qui ne s'annulent pas (voire strictement positives si $\alpha$ n'est pas entier).
   (a) Montrer que si $y$ est solution de (3), la fonction $z = y^{1-\alpha}$ satisfait une équation différentielle linéaire que l'on précisera.

(b) En déduire des solutions des équations suivantes avec les conditions initiales proposées, sur les intervalles $I_4$ et $I_5$ les plus grands possibles (à préciser) :

$$(\mathcal{E}_4) : \begin{cases} y' = y - t(t+1)y^3 \\ y(0) = -1 \end{cases} \qquad (\mathcal{E}_5) : \begin{cases} y' = 2(y + \sqrt{y}) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

4. *Équations de Ricatti.* On appelle ainsi les équations du type :

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t)^2 + c(t) \tag{4}$$

où $a, b$ et $c$ sont des fonctions à valeurs réelles.

(a) Montrer que si $\varphi_0$ est une solution particulière de (4), alors pour tout $y$ solution de (4), $z = y - \varphi_0$ satisfait une équation de type Bernoulli (3) dont on précisera les coefficients en fonction de $\varphi_0(t), a(t)$ et $b(t)$.

(b) En déduire une solution, sur un intervalle $I_5$ le plus grand possible à préciser, de l'équation :

$$(\mathcal{E}_6) : \begin{cases} y' = y^2 - y - 6 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

**Exercice.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel *fixé*. L'objectif de l'exercice est d'étudier la limite de la somme :

$$S_n = \ln\left(1 + \mathrm{th}^2\frac{\alpha}{2}\right) + \ln\left(1 + \mathrm{th}^2\frac{\alpha}{4}\right) + \ln\left(1 + \mathrm{th}^2\frac{\alpha}{8}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \mathrm{th}^2\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

Les questions 1 et 2 sont indépendantes mais leurs résultats pourront être utilisés dans la question 3.

1. *Un calcul de limite.*

(a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $\mathrm{th}x \leqslant x$.

(b) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $\mathrm{th}x \geqslant x - \frac{x^3}{3}$.

(c) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\mathrm{th}x}{x}$.

2. *Quelques relations.*

(a) Montrer pour tout réel $x$, la relation : $\mathrm{ch}^2x + \mathrm{sh}^2x = \mathrm{ch}(2x)$.

(b) Montrer pour tout réel $x$, la relation : $2\mathrm{ch}x\mathrm{sh}x = \mathrm{sh}(2x)$.

(c) En déduire pour tout réel $x$ la relation :

$$\mathrm{th}(2x) = \frac{2\,\mathrm{th}x}{1 + \mathrm{th}^2x}$$

3. *Calcul de la limite de $S_n$.*

(a) Quelle est la valeur de $S_n$ pour $\alpha = 0$ ? Par la suite, on suppose $\alpha \neq 0$.

(b) Pour tout entier $k$, écrire $1 + \mathrm{th}^2\frac{\alpha}{2^k}$ sous la forme $2\frac{\mathrm{th}\,a}{\mathrm{th}\,b}$ où $a$ et $b$ sont à déterminer en fonction de $\alpha$ et $k$.

(c) En déduire que $S_n = \ln\left(2^n\,\mathrm{th}\,\frac{\alpha}{2^n}\right) - \ln(\mathrm{th}\alpha)$.

(d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.