ème11 ée1 ée2 éatoirement2 ème23 éatoiresXJ23 éranceDeXJ74

LYCEE CHATEAUBRIAND- RENNES -

ECS1

DEVOIR SURVEILLE n°3

OPTION SCIENTIFIQUE

Samedi 12 janvier 2008

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Il vous est demandé de souligner ou d'encadrer les résultats obtenus les résultats de leurs calculs.
Vous ne devez faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints

---

Ce devoir comporte deux problèmes. Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez en indiquant bien les références de chacun.

Problème 1

Soit n un entier naturel non nul et dans les 2 premières parties de ce problème, on considère une urne contenant une boule blanche et $n-1$ boules noires. Trois joueurs A, B, C tirent à tour de rôle une boule dans cette urne dans l'ordre suivant : A joue le premier, puis B joue après A, puis C joue après B, puis A joue après C etc. Le gagnant est le premier des trois qui extrait la boule blanche.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note A_k (respectivement B_k,C_k) l'événement "A(respectivement B,C) gagne au $k$ième tirage."
on note A (respectivement B,C) l'événement "A (respectivement B,C) gagne la partie."
L'objectif de ce problème est de comparer les probabilités P(A), P(B), P(C) selon le mode de tirage et, dans la troisième partie, avec une urne remplie aléatoirement.

Partie 1 : Les tirages se font avec remise de la boule tirée.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(A_{3k+1})$, $P(B_{3k+2})$, $P(C_{3k+3})$
2. En déduire P(A), P(B), P(C) et vérifier que $P(A) > P(B) > P(C)$. Ce résultat était-il prévisible ?

Partie 2 : Les tirages se font sans remise de la boule tirée.

1. Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $3k+3 \leq n$, $P(A_{3k+1}) = P(B_{3k+2}) = P(C_{3k+3}) = \dfrac{1}{n}$.
2. (a) On suppose dans cette question que $n = 3m+1$ avec $m \in \mathbb{N}$.
   Montrer que $P(A) = \dfrac{m+1}{3m+1}$, $P(B) = P(C) = \dfrac{m}{3m+1}$.

   (b) On suppose dans cette question que $n = 3m+2$ avec $m \in \mathbb{N}$.
   Déterminer en fonction de m, $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

   (c) On suppose dans cette question que $n = 3m+3$ avec $m \in \mathbb{N}$.
   Montrer que $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{3}$.

   (d) Conclure.

Partie 3 : les tirages se font sans remise dans une urne remplie aléatoirement

L'urne est maintenant remplie de la façon suivante : On lance une pièce qui donne pile avec une probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec une probabilité $1-p$. On pose $q = 1-p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang du premier pile obtenu lors de ces lancers. Si N prend la valeur n $(n \in \mathbb{N}^*)$, on place une boule blanche et $n-1$ boules noires dans l'urne.

1. (a) Donner en fonction de m, $P_{[N=3m+1]}(A)$, $P_{[N=3m+2]}(A)$, $P_{[N=3m+3]}(A)$.

   (b) En déduire que :
   $$P(A) = \frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+1} q^{3m} p$$
2. De la même façon, établir que :
   $$P(B) = \frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{3m+1} q^{3m} p.$$
3. déterminer une expression analogue pour P(C).
4. Conclure.

5. **Informatique**

   (a) Ecrire un programme premier programme qui demande la valeur de p et de k. (en déduire la valeur de $q = 1-p$) et calcule la valeur du terme de rang k de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = \dfrac{n+1}{3n+1} q^{3n+1} p$
   Rappel : Turbo Pascal ne connaît pas la fonction puissance et je vous demande de ne pas utiliser les fonctions logarithmes et exponentielles.

   (b) Ecrire un second programme qui demande la valeur de p et de n et calcule $\sum_{m=0}^{n} U_m$.
   Attention dans ce second programme on suppose que Turbo Pascal connaît la fonction $U(k)$ qui permet de calculer U_k en fonction de k. (en clair : pour

le second programme faire comme si vous aviez fait le premier sans refaire les calculs).

6. Dans les 3 questions suivantes, on cherche à obtenir une expression intégrale de P(A).

   (a) $\forall x \in [0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, écrire explicitement $\sum\limits_{m=0}^{n-1} x^{3m}$ en fonction de x et de n.

   (b) En déduire que :

   $$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{q^{3m+1}}{3m+1} = \int_0^q \frac{1}{1-x^3}\,dx - \int_0^q \frac{x^{3n}}{1-x^3}\,dx\,.$$

   (c) Etablir enfin que :

   $$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{q^{3m+1}}{3m+1} = \int_0^q \frac{1}{1-x^3}\,dx$$

7. Etablir de même que :

   $$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{q^{3m+2}}{3m+2} = \int_0^q \frac{x}{1-x^3}\,dx\,.$$

8. (a) Déterminer les constantes réelles a, b, c, d telles que $\forall m \geq 0$

   $$\frac{m+1}{3m+1} = a + \frac{b}{3m+1} \text{ et } \frac{m+1}{3m+2} = c + \frac{d}{3m+2}.$$

   (b) En déduire que $P(A) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{p}{3q} \displaystyle\int_0^q \frac{2+x}{1-x^3}\,dx\,.$

Problème 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$.

1. On considère la suite $(P_j)_{j\geq 1}$ de fonctions polynômes définie par :
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = x^{n-1}$ et pour $j \geq 1$, $P_{j+1}(x) = P_j(x) + \dfrac{1-x}{n}P_j'(x)$.
   Montrer par récurrence que $\forall j \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_j(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}(1-\frac{i}{n})^{j-1}(x-1)^i$.
   Dans la suite du problème, on considère un marché sur lequel n fournisseurs proposent des biens identiques à des consommateurs faisant tous une commande et une seule. Les commandes de ces derniers arrivent, successivement et de façon indépendante, auprès de ces n fournisseurs, chacun d'eux étant choisi de façon équiprobable.
   On désigne par X_j la variable aléatoire indiquant le nombre de fournisseurs ayant reçu au moins une commande de l'un ou plusieurs **des j premiers consommateurs**.

2. **Etude de la loi des variables aléatoires X_j**

   (a) Quelle sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_j.

(b) Déterminer les lois de X_1 et X_2

(c) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{[X_j=k]}(X_{j+1}=k)$ et pour $k \geq 2$, $p_{[X_j=k-1]}(X_{j+1}=k)$.

(d) Que vaut $p_{[X_j=i]}(X_{j+1}=k)$ lorque $1 \leq i \leq n$, l'entier i étant distinct de $k-1$ et de k ?

(e) En déduire à l'aide de la formule des probabilités totales, l'expression de $p(X_{j+1}=k)$ en fonction de certaines des probabilités $p(X_j=i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

3. On pose ensuite pour tout x réel, $G_j(x) = \sum_{k=1}^{n} p(X_j = k)x^{n-k}$.

   Montrer que $\forall j \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_{j+1}(x) = G_j(x) + \dfrac{1-x}{n}G_j'(x)$. (relation *)
   Montrer que les suites (G_j) et (P_j) sont égales.

4. En déduire que : $p(X_j = n) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(1-\frac{i}{n})^{j-1}$.

5. Justifier alors la formule combinatoire suivante :

   Pour $1 \leq j \leq n-1$, $\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(1-\frac{i}{n})^{j-1} = 0$

6. Prouver que $\lim\limits_{j\to+\infty} p(X_j = n) = 1$

7. **Calcul de l'espérance de X_j**

   (a) Calculer $G_j(1)$, puis exprimer $G_j'(1)$ en fonction de $E(X_j)$ et de n.

   (b) A l'aide de la relation *, exprimer $G_{j+1}'(1)$ en fonction de $G_j'(1)$.
   Que vaut $G_1'(1)$?

   (c) En déduire $G_j'(1)$, puis $E(X_j)$ en fonction de j et de n.

   (d) Déterminer alors $\lim\limits_{j\to+\infty} E(X_j)$.

8. On désigne par T la variable aléatoire réelle indiquant le nombre de consommateurs ayant déjà procédé à une commande lorsque pour la première fois, chacune des n fournisseurs a reçu au moins une commande.

   (a) Justifier que $[T \leq j]$ est aussi l'événement $[X_j = n]$.

   (b) Exprimer pour $j \geq 1$, $p(T = j+1)$ en fonction de $p(X_{j+1} = n)$ et $p(X_j = n)$.
   On remarquera $p(T = 1) = p(X_1 = n) = 0$.

   (c) En déduire que $\sum_{j=1}^{+\infty} p(T = j) = 1$