Dans un plan orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1 cm), on considère deux cercles de centre O et de rayons respectifs 2 et 6. On désigne par A et B

les points où la demi-droite des abscisses positives portée par l'axe $(O, \vec{i})$ coupe ces cercles.
Un premier mobile, P, parti de B à l'instant $t = 0$, décrit le grand cercle avec une vitesse angulaire constante de +1 radian par seconde ; un second mobile, Q, parti de A à l'instant $t = 0$, décrit le petit cercle avec une vitesse angulaire de +3 radians par seconde.

A)

1) Quelles sont, à l'instant t (évalué en secondes), les coordonnées du point P, du point Q, du milieu, M, de $[PQ]$ et du milieu, N, de $[MQ]$?

2) a) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$ du point M.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ON}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux , puis déterminer une relation simple entre leurs normes.

B) On voudrait construire la trajectoire $\mathscr{C}$ du point M lorsque les mobiles P et Q décrivent leurs cercles respectifs.

1) Montrer que la trajectoire $\mathscr{C}$ peut être construite complètement à partir de l'arc $\mathscr{C}_0$ obtenue pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ en exprimant la position de M à l'instant $\pi - t$ et à l'instant $2\pi - t$ en fonction de sa position à l'instant t.

2) Déterminer les positions M_0, $M_{\pi/6}$, $M_{\pi/4}$ et $M_{\pi/2}$ du point M aux instants $t = 0$, $t = \pi/6$, $t = \pi/4$ et $t = \pi/2$. Montrer qu'en $M_{\pi/4}$ la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

3) a) Construire les points $M_{\pi/4}$, $M_{\pi/3}$ et les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points en utilisant la propriété du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ en ces points montrée à la question A2b). On admettra qu'en $M_{\pi/2}$ $\mathscr{C}$ est tangente à l'axe des ordonnées, et qu'en M_0 la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des ordonnées.

b) Construire l'arc $\mathscr{C}_0$ (on pourra préciser la courbe en partant d'autres points P et en construisant successivement les points Q, M et N correspondants).

c) Construire la trajectoire complète en utilisant les symétries montrées à la question B1).

Remarque : la courbe obtenue est appelée « épicycloïde à deux points de rebroussement » : c'est la courbe décrite par le point d'un cercle de rayon a roulant sans glisser sur un cercle de rayon $2a$, donc ici un cercle de rayon 1 roulant sur le cercle de rayon 2 décrit par le point Q (les deux cercles étant tangents extérieurement).

Pour les tracés demandés, utilisez la figure de la page suivante où nous avons « amorcé » le tracé de l'arc $\mathscr{C}_0$ au voisinage des points M_0 et $M_{\pi/2}$.