Yunlong Sheng

PHY-10487 Physique Mathématique III
Devoir 2
À remettre février 27 2009

Note: Remettre un devoir par équipe de deux étudiants (maximum).

1. (20%)

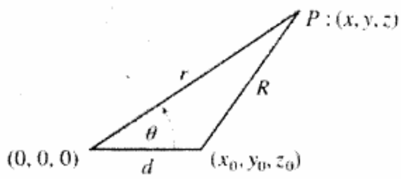
1. Le potentiel gravitationnel en un point $P = (x, y, z)$ dû à une masse unitaire positionnée en (x_0, y_0, z_0) est:

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

Selon la géométrie suivante, démontrez que:

$$\text{si } r < d \ : \ \phi(r) = \sum_0^\infty P_n(\cos\theta)\frac{r^n}{d^{n+1}},$$

$$\text{si } r > d \ : \ \phi(r) = \sum_0^\infty P_n(\cos\theta)\frac{d^n}{r^{n+1}},$$



où l'on retrouve les polynômes de Legendre P_n.

2. (20%) Soit l'équation différentielle:

$$(1 - x^2)\ y'' - 2x\ y' + [n(n+1) - \frac{m^2}{1 - x^2}]\ y = 0.$$

Cette équation ressemble à l'équation de Legendre et a des solutions de la forme:

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2}\ \frac{d^m P_n(x)}{dx^m},$$

où $P_n(x)$ sont les polynômes de Legendre. Ces solutions $P_n^m(x)$ sont alors appelées polynômes de Legendre associés. Par exemple, on les retrouve en mécanique quantique pour décrire la partie angulaired e la fonction d'onde précisant l'état des électrons

En effectuant le changement de variable

$$y(x) \ = \ (1 - x^2)^{m/2}\ \ v(x)$$

dans l'équation différentielle, démontrez en effet que les solutions sont $v(x) = \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$.

3. (20%) Transformez les équations suivantes sous la forme d'une équation différentielle de Bessel d'ordre v et donnez la solution générale de l'équation originale.

a) $4x\ y'' + 2\ y' + x\ y = 0.$

b) $9x^2\ y'' + 9x\ y' + (4x^{2/3} - 16)\ y = 0$ (utilisez $z = 2x^{1/3}$).

c) $9x^2\ y'' - 27x\ y' + (9x^2 + 35)\ y = 0$ (utilisez $u = y/x^2$).

4. (20%)

Voici une fonction discontinue et périodique:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos(x) & 0 < x < \pi \\ f(x) = 1 & \pi < x < 3\pi/2 \\ f(x) = -1 & 3\pi/2 < x < 2\pi \end{array}$$

a) Représentez cette fonction par une série de Fourier. Expliquez bien votre cheminement et donnez au moins les 6 premiers termes de la série (i.e. chaque terme est formé d'une fonction en $\sin(Ax)$ ou $\cos(Bx)$ où A et B, des constantes, sont les plus petites valeurs possibles lorsqu'associées aux premiers termes).

b) Démontrez (sans invoquer le théorème de convergence) que cette série de Fourier tend bien vers la valeur 0 lorsque $x = 0$ et lorsque $x = \pi$.

5) (20%)

Voici l'équation hypergéométrique:

$$x(1-x)\, y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\, y' - \alpha\beta\, y = 0,$$

où α, β et γ sont des paramètres fixes. Démontrez que, dans le cas où γ n'est pas un entier, cette équation différentielle a pour solution générale, sur l'intervalle $0 < x < 1$:

$$y(x) = a_0\, F(\alpha, \beta; \gamma; x) + b_0\, F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma; 2 - \gamma; x).$$

Les F dénotent les fonctions hypergéométriques que l'on retrouve, par exemple, dans des calculs d'opacité (i.e. de sections efficaces quantiques d'une transition atomique) dans les atmosphères stellaires. Les fonctions hypergéométriques s'écrivent bien en terme de la fonction gamma.

• Dans un premier temps, montrez que l'équation différentielle a les deux points singuliers réguliers $x = 0$ et $x = 1$.

• Suivant la méthode de Frobenius, vous pouvez solutionner pour $x_0 = 0$. Démontrez d'abord que les racines seront $r = 0$ et $r = 1 - \gamma$.

• Pour $r = 0$, démontrez la relation de récurrence:

$$n(n + \gamma - 1)\, a_n - (n + \alpha - 1)(n + \beta - 1)\, a_{n-1} = 0, \qquad n \geq 1.$$

• Ainsi, obtenez les coefficients:

$$a_n = \frac{(\alpha)_n\, (\beta)_n}{n!\, (\gamma)_n}\, a_0, \qquad n \geq 1,$$

où on a utilisé la notation factorielle:

$$\begin{aligned} &(t)_n = t(t+1)(t+2)...(t+n-1), \qquad n \geq 1, \\ &(t)_0 = 1, \qquad t \neq 0. \end{aligned}$$

• Démontrez alors qu'une première solution est:

$$y_{r=0}(x) = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{(\alpha)_n\, (\beta)_n}{n!\, (\gamma)_n}\, x^n.$$

Cette solution a en fait été nommée la fonction hypergéométrique de Gauss et est représentée par $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$. Les fonctions hypergéométriques sont une généralisation des séries géométriques (par exemple, pour un entier $\beta > 0$, $F(1, \beta; \beta; x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$).

• À l'aide de la fonction gamma ($\Gamma(z) = \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-u} du$, où $z > 0$), démontrez alors la relation avec la fonction factorielle (pour $t > 0$, et n un entier non-négatif):

$$(t)_n = \frac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)},$$

tel que la première solution devient:

$$y_{r=0}(x) = F(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)\, \Gamma(\beta + n)}{n!\, \Gamma(\gamma + n)}\, x^n.$$