MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

Épreuve complémentaire

A.D. 2008
Concours externe et interne

Calculatrice électronique non autorisée

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix du candidat. Dans l'ensemble du sujet, pour traiter une question, les candidats pourront admettre les réponses des questions précédentes de l'exercice. Il est en revanche demandé aux candidats de numéroter soigneusement les réponses aux questions sur leur copie.

Notations utilisées dans le sujet :

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^\star$, $\mathbb{R}^{\star+}$, $\mathbb{R}^{\star-}$: respectivement l'ensemble des réels, l'ensemble des réels positifs, l'ensemble des réels négatifs, l'ensemble des réels non nuls, l'ensemble des réels strictement positifs et l'ensemble des réels strictement négatifs
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^\star$: respectivement l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des entiers naturels strictement positifs
- $\mathbb{P}(A)$: probabilité de l'évènement A
- $\mathbb{E}(X)$, σ_X^2, σ_X, $Med(X)$: respectivement l'espérance, la variance, l'écart-type et la médiane de la variable aléatoire X
- $Cov(X,Y)$: la covariance des variables aléatoires X et Y
- $\cup$, $\cap$, $\subset$, $\in$: respectivement l'union, l'intersection, l'inclusion et l'appartenance ensembliste
- $\forall$, $\exists$: respectivement "pour tout" et "il existe"
- $m_{i,j}$: le terme de la i-ème ligne et j-ième colonne de la matrice M
- log : le logarithme népérien

Rappel :

- La densité de la loi normale centrée réduite est $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors :
  $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$ et $\sigma_X^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$
- n variables aléatoires réelles $(X_1, X_2, ..., X_n)$ sont indépendantes si pour tout n-uplet $(\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n)$ de parties de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in \mathcal{A}_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i \in \mathcal{A}_i\right)$$

- n variables aléatoires réelles $(X_1, X_2, ..., X_n)$ sont indépendantes deux à deux si tout couple de variables (X_i, X_j), $1 \leq i < j \leq n$ est un couple de variables indépendantes
- La médiane de la variable aléatoire réelle X est le plus petit entier α tel que $\mathbb{P}(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2}$

1 Exercice 1

1. Soit $(X_1, ..., X_n)$ des variables aléatoires réelles indépendantes. Les variables $(X_1, ..., X_n)$ sont-elles indépendantes deux à deux ? Justifier.

2. On considère un dé à quatre faces non pipé. On modélise un lancer par la variable aléatoire réelle D telle que $\forall i \in \{1,2,3,4\}, \quad \mathbb{P}(D = i) = \frac{1}{4}$. On définit les variables X_1, X_2, X_3 de la façon suivante : $X_1 = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad D \in \{2,3\} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$,

   $X_2 = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad D \in \{1,3\} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$, $X_3 = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad D \in \{1,2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$

   (a) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1)$, $\mathbb{P}(X_1 = 0)$, $\mathbb{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 1)$, $\mathbb{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$ $\mathbb{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1)$

   (b) Un n-uplet de variables aléatoires réelles indépendantes deux à deux est-il un n-uplet de variables aléatoires indépendantes ? On justifiera la réponse en utilisant le résultat de la question précédente.

2 Exercice 2

1. Soit X_1 une variable aléatoire dont on donne quelques caractéristiques :

	Notation	Valeur
Espérance	$E(X_1)$	15
Écart-type	σ_{X_1}	3

   On pose $Y_1 = a + bX_1 + cX_1^2$:

   (a) Pouvez-vous calculer l'espérance de Y_1 à partir du tableau précédent ? Si oui, exprimez le résultat en fonction de a, b, c et des valeurs du tableau précédent.

   (b) Pour quelles valeurs de (a, b, c) pouvez-vous calculer l'écart-type de Y_1 ? Pour les valeurs où le calcul est possible, exprimez le résultat en fonction de a, b, c et des valeurs du tableau précédent.

2. Soit X_2 une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles dont la fonction de répartition est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}^+$, dans ce cas la médiane de X_2 est l'unique réel α tel que $P(X_2 > \alpha) = P(X_2 \leq \alpha) = P(X_2 \geq \alpha) = P(X_2 < \alpha) = \frac{1}{2}$. La médiane de X_2 est $Med(X_2) = 10$. On pose $Y_2 = a + bX_2 + cX_2^2$. Pour quelles valeurs de (a, b, c) pouvez-vous calculer la médiane de Y_2 ? Pour les valeurs où le calcul est possible exprimez le résultat en fonction de a, b, c. (indication : pour le cas $c > 0$, on discutera selon la valeur de $-\frac{b}{c}$).

3 Exercice 3

On note $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe k, c'est à dire l'ensemble des fonctions k fois dérivables et dont la dérivée k-ième est continue. Ainsi, $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée est continue.

Pour $(h, g) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})^2$ on définit : $\mathcal{E}_{h,g} = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) | \forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) \leq f'(x) + xf(x) \leq g(x) \right\}$

1. Montrer que la fonction $l(t) = f(t)e^{\frac{t^2}{2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2. Montrer que $f \in \mathcal{E}_{h,g}$ implique que :

$$\forall x \geq 0 \quad e^{-\frac{x^2}{2}} \left[f(0) + \int_0^x h(t) e^{\frac{t^2}{2}} dt \right] \leq f(x) \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \left[f(0) + \int_0^x g(t) e^{\frac{t^2}{2}} dt \right]$$

$$\forall x \leq 0 \quad e^{-\frac{x^2}{2}} \left[f(0) + \int_0^x g(t) e^{\frac{t^2}{2}} dt \right] \leq f(x) \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \left[f(0) + \int_0^x h(t) e^{\frac{t^2}{2}} dt \right]$$

3. Dans le cas où $h = g$, donner les éléments de $\mathcal{E}_{h,g}$

4. On suppose maintenant que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = g(x) = 0$.

   (a) Montrer que $\mathcal{E}_{h,g}$ est un espace vectoriel dont on calculera la dimension.

   (b) Quels sont les éléments de $\mathcal{E}_{h,g}$ qui sont également des densités de probabilité? A quelle(s) loi(s) cette (ces) densité(s) corresponde(nt)-elle(s) ?

5. On suppose maintenant que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = g(x) = Kxe^{-\frac{x^2}{2}}$, avec $K \in \mathbb{R}^\star$.

   (a) $\mathcal{E}_{h,g}$ est-il un espace vectoriel ?

   (b) Quelles sont les conditions (nécessaires et suffisantes) que doivent vérifier $f(0)$ et K pour que f appartienne à $\mathcal{E}_{h,g}$ et soit simultanément une densité de probabilité ?

   (c) Pour $K = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, étudier (parité, variations, extrema locaux, graphe) la densité de probabilité qui appartient à $\mathcal{E}_{h,g}$ (on donne $\sqrt{2} \simeq 1,414$; $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \simeq 0,798$; $e^{-1} \simeq 0,368$).

4 Exercice 4

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ n variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de variance $\sigma_X^2 > 0$. Soit Y une variable aléatoire réelle, indépendante de $(X_1, X_2, ..., X_n)$, de variance $\sigma_Y^2 > 0$.

On note I la matrice identité de taille $n \times n$, et J la matrice de terme constant $\frac{1}{n}$ de taille $n \times n$, enfin on note M la matrice de variance-covariance de $(Y + X_1, Y + X_2, ..., Y + X_n)$ (on rappelle que le terme $m_{i,j}$ de M est $Cov(Y + X_i, Y + X_j)$).

1. Montrer que $M = \alpha_n I + \beta_n J$, avec α_n et β_n que l'on exprimera en fonction de $n, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$.

2. Montrer que $M^2 = \gamma_n M + \delta_n I$, avec γ_n et δ_n que l'on exprimera en fonction de $n, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$.

3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \lambda_n I + \mu_n J$, avec λ_n et μ_n que l'on exprimera en fonction de $n, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$.

4. Quelle est la limite de $\frac{\lambda_n}{\mu_n}$ quand $n \longrightarrow +\infty$?