Exercices Analyse spectrale

$H$ est un espace de Hilbert séparable, $L(H)$ l'algèbre des opérateurs (linéaires) bornés sur $H$. On rappelle qu'une suite ou famille d'opérateurs bornés $A_n \in L(H)$ converge au sens fort vers $A \in L(H)$ si pour tout $\psi \in H$, $A_n\psi$ converge vers $A\psi$ dans $H$:

$$\lim_{n\to\infty} ||A_n\psi - A\psi|| = 0. \tag{1}$$

On note $B(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions boréliennes bornées sur $\mathbb{R}$. Si $(A, D(A))$ est un opérateur auto-adjoint (pas nécessairement borné), et si $f \in B(\mathbb{R})$, on définie $f(A)$ par le calcul fonctionnel. On note par $\sigma(A)$ le spectre de $A$. Si $G \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble borélien, on note par $\chi_G \in B(\mathbb{R})$ sa fonction caractéristique. Si $K \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble compact, on pose finalement $C(K)$ l'espace des fonctions continues sur $K$.

Dans la solution des exercises on pourra librement utiliser le théorème spectral. Les énoncés d'une des question peuvent être utilisé dans la solution des autres questions.

## Exercice 1.

On suppose que $(A, D(A))$ est un opérateur auto-adjoint sur $H$.

1. (a) Soit $f_n \in B(\mathbb{R})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite de fonctions uniformément bornées sur $\mathbb{R}$ telle que $f_n$ converge simplément vers $f \in B(\mathbb{R})$. Montrer que $f_n(A) \to f(A)$ au sens fort.
(On pourra par exemple utiliser la version multiplicative du théorème spectral.)

(b) Montrer, par un exemple, que on ne peut pas remplacer "convergence au sens fort" par "convergence en norme" dans 1(a).

(c) On suppose que $A$ est borné. Montrer que $\{f(A) : f \in C(\sigma(A))\}$ est un sous-espace fermé de $L(H)$ pour la topologie de convergence en norme. Quelle est sa fermeture pour la topologie de convergence au sens fort?

(d) Si $(A, D(A))$ n'est pas borné, construire une suite $A_n$ d'opérateurs auto-adjoints bornés telle que $A_n$ converge fortément vers $A$ sur $D(A)$, au sens que

$$A_n\varphi \to A\varphi, \ \forall \varphi \in D(A). \tag{2}$$

La question suivante utilisera la notion de différentiabilité d'une fonction $g : I \to H$ d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans un espace de Hilbert: si $t$ est un point intérieur de $I$, on dit que $g$ est différentiable en $x$ au sens fort ssi

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left( g(t+h) - g(t) \right) =: \frac{d}{dt} g(t), \tag{3}$$

existe au sens de convergence en norme.

3. Pour $t \in \mathbb{R}$ on définit l'opérateur $e^{itA}$ par le calcul fonctionnel comme

$$e^{itA} := e_t(A), \tag{4}$$

où $e_t \in B(\mathbb{R})$ est définie par $e_t(x) := e^{itx}$.

(a) Montrer que l'application $t \to e^{itA}$ de $\mathbb{R}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $H$ munie de la toplologie de convergence forte. Montrer que c'est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans $L(H)$ avec comme opération la composition d'opérateurs. En déduire que $e^{itA}$ est inversible, et même unitaire.

(b) Montrer que si en plus $A$ est borné, alors l'application $t \to e^{itA}$ est continue pour la topologie de norme sur $L(H)$. Montrer, par un exemple, que ceci n'est plus vraie si $A$ n'est pas borné.

Si $\varphi \in H$, on pose

$$g_\varphi(t) := e^{itA}\varphi, \quad g_\varphi : \mathbb{R} \to H. \tag{5}$$

(c) Montrer que si $\varphi \in D(A)$, alors l'application $g_\varphi$ est différentiable en $t = 0$, avec

$$\frac{d}{dt} g_\varphi(0) = iA\varphi. \tag{6}$$

(On pourra utiliser l'estimation $|e^{ix} - 1 - ix| \leq |x|^2$, $x \in \mathbb{R}$.)

(d) Déduire de (c) que $g_\varphi$ est différentiable partout, et que

$$\frac{d}{dt} g_\varphi(t) = g_{iA\varphi}(t). \tag{7}$$

Montrer ensuite que $D(A)$ est invariant sous $e^{itA}$, et que

$$\frac{d}{dt} e^{itA}\varphi = iAe^{itA}\varphi, \tag{8}$$

pour tout $\varphi \in D(A)$.

**Exercice 2.**

1. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $P_{\{\lambda\}}(A) := \chi_{\{\lambda\}}(A)$ est un projecteur orthogonal. Montrer que $P_{\{\lambda\}}(A) \neq 0$ si et seulement si $\lambda$ est valeur propre de $A$, et que dans ce cas $\mathrm{Im} P_{\{\lambda\}}(A)$ est l'espace propre associé.

2. Soit $g : I \to H$ une fonction continue d'un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ dans $H$. Montrer qu'il existe pour tout $a, b \in I$ une unique vecteur $\psi_{a,b} \in H$ tel que pour tout $\varphi \in H$ on a que

$$(\varphi, \psi_{a,b}) = \int_a^b (\varphi, g(s))\, ds, \tag{9}$$

où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalair de $H$. On appelle $\psi_{a,b}$ l'intégrale de $g$ sur $[a, b]$, et on le note par

$$\psi_{a,b} =: \int_a^b g(s)\, ds. \tag{10}$$

3. On définit pour $t > 0$ l'opérateur moyen $M_t \in L(H)$ de $e^{itA}$ sur $[0, t]$ par:

$$M_t \varphi := \frac{1}{t} \int_0^t e^{isA} \varphi\, ds. \tag{11}$$

(a) Vérifier que ceci définit bien un opérateur borné.

(b) Calculer la limite simple sur $\mathbb{R}$ de la famille de fonctions

$$\frac{1}{t} \int_0^t e^{isx}\, ds, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

sur $\mathbb{R}$, quand $t \to \infty$.

(c) Montrer que si $t \to \infty$, alors

$$M_t := \frac{1}{t} \int_0^t e^{isA}\, ds \ \to P_{\{0\}}(A), \tag{13}$$

au sens de convergence fort d'opérateurs, où $P_{\{0\}}(A) = \chi_{\{0\}}(A)$ est le projecteur spectral sur le noyeau de $A$.

4. Soit $T := i^{-1} \dfrac{d}{dx}$ avec domaine

$$D(T) = H^1(\mathbb{R}) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) : \varphi' \in L^2(\mathbb{R})\}, \tag{14}$$

où l'espace $L^2$ est par rapport à la mesure de Lebesgue, et où $\varphi'$ est la dérivée de $\varphi$ en sens de distributions. On peut aussi définir $D(T)$ comme l'ensemble des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ que l'on peut écrire comme intégrale d'une fonction $L^2$; on note alors cette dernière fonction par $\varphi'$.

(a) Montrer que les moyennes $\frac{1}{t}\int_0^t e^{isT} ds$ convergent fortément vers 0 quand $t \to \infty$, mais pas en norme.

(b) On prend de nouveau $T = i^{-1}\frac{d}{dx}$, mais maintenant comme opérateur dans $L^2([0,1])$, avec domaine

$$D(T) = \{\varphi \in L^2([0,1]) : \varphi' \in L^2([0,1]), \varphi(0) = \varphi(1)\}. \tag{15}$$

Montrer que la projection ortogonal $P_{\{0\}} = P_{\{0\}}(T)$ sur le noyeau de $T$ est donnée par

$$P_{\{0\}}(\varphi)(x) = \int_0^1 \varphi(y)dy \ \forall x \in [0,1] \ \ \text{(fonction constante)}, \tag{16}$$

et que les moyennes convergent maintenant vers $P_{\{0\}}$ en norme:

$$||\frac{1}{t}\int_0^t e^{isT}\, ds - P_{\{0\}}|| \to 0. \tag{17}$$

(c) Plus générallement, supposons que $(A, D(A))$ est un opérateur auto-adjoint qui admet un *gap spectral autour de 0*, au sens qu'il existe un intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ telle que $\sigma(A) \cap ]-\varepsilon, \varepsilon[$ est soit vide, soit ne contient que 0. Montrer que dans ce cas $\frac{1}{t}\int_0^t e^{isA}\, ds \to P_{\{0\}}(A)$ en norme, quand $t \to \infty$.

*Indication pour (a) et (b)*: utiliser la transformée de Fourier et les séries de Fourier.

**Exercice 3.**

On note

$$H^2(0,1) := \{\varphi \in L^2(0,1) : \varphi', \varphi'' \in L^2(0,1)\},$$

avec dérivées en sens de distributions sur $(0,1)$. Une description équivalente de $H^2(0,1)$ est comme l'espace de toutes les fonctions $\varphi$ de carré intégrable sur $(0,1)$ telle que $\varphi$ est l'intégrale d'une fonction de carré intégrable, notée $\varphi'$ qui, à son tour, peut être écrit comme intégrale d'une fonction de carré intégrable, qou'on note alors $\varphi''$. On admet le résultat suivant: si $\varphi \in H^2(0,1)$ alors après changement éventuelle de $\varphi'$ sur un ensemble de mesure 0, on peut supposer que $\varphi, \varphi' \in C[0,1]$; en particulier, $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ sont bien définies pour $x = 0, 1$.

1. (a) Montrer que si $\varphi, \psi \in C^2([0,1])$, alors

$$-\int_0^1 \varphi''\overline{\psi}dx = -[\varphi'\overline{\psi}]_0^1 + [\varphi\overline{\psi'}]_0^1 - \int_0^1 \varphi\overline{\psi''}dx, \tag{18}$$

où si $g$ est une fonction sur $[0,1]$, on pose $[g]_0^1 := g(1) - g(0)$. On admettra que cette identité reste valable pour $\varphi, \psi \in H^2(0,1)$.

(b) Soit $T_0$ l'opérateur $T_0\varphi = -\varphi''$ avec domaine

$$D(T_0) = \{\varphi \in H^2(0,1) : \varphi(x) = \varphi'(x) = 0 \text{ pour } x = 0, 1\}. \tag{19}$$

Calculer l'adjoint $T_0^*$. Est-ce que $T_0$ est auto-adjoint?

(c) Calculer $\sigma(T_0^*)$.

2. On se donne deux couples de nombres réels $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ et $\beta = (\beta_0, \beta_1)$, et on définit l'opérateur non-borné $(T_{\alpha,\beta}, D(T_{\alpha,\beta}))$ par $T_{\alpha,\beta}\varphi = -\varphi''$ sur le domaine $D(T_{\alpha,\beta}) := \{\varphi \in H^2(0,1) : \alpha_0\varphi(0) + \alpha_1\varphi'(1) = 0,\ \beta_0\varphi(1) + \beta_1\varphi'(1) = 0\}$.

(a) Montrer que $T_{\alpha,\beta}$ est auto-adjoint.

(b) Si $V : (0,1) \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable bornée, montrer que l'opérateur

$$T_{\alpha,\beta} + V : \varphi \to -\varphi''(x) + V(x)\varphi(x), \tag{20}$$

avec domaine $D(T_{\alpha,\beta}$ est auto-adjoint.

3. On considère maintenant l'opérateur formel $T\varphi = -i\varphi'''$ sur $L^2(0,1)$. Donner un exemple d'un domaine $D(T) \subset L^2(0,1)$ tel que $(T, D(T))$ est auto-adjoint. Motiver votre reponse.