Correction YK ex III

Rappel énoncé : X_n, Y_n deux suites de v.a.r.

a_n et b_n deux suites de réels ;

Hyp. : $X_n \xrightarrow{L} X$, $Y_n \xrightarrow{L} 0$. Montrer
$$\begin{cases} a_n X_n + b_n \xrightarrow{L} aX + b & (1) \\ X_n Y_n \xrightarrow{L} 0 & (2) \\ X_n + Y_n \xrightarrow{L} X & (3) \end{cases}$$

(1) Puisque : $\underbrace{E e^{i\lambda(a_n X_n + b_n)}}_{\varphi_{a_n X_n + b_n}(\lambda)} = \underbrace{E e^{i\lambda a_n X_n}}_{\varphi_{a_n X_n}(\lambda)} \underbrace{E e^{i\lambda b_n}} \longrightarrow \underbrace{E e^{i\lambda a X}}_{\varphi_{aX}(\lambda)} E e^{i\lambda b} = \underbrace{E e^{i\lambda(aX+b)}}_{\varphi_{aX+b}(\lambda)}$

D'où la conclusion par application du Th. de Levy. ■

(2) Il suffit de démontrer $P(|X_n Y_n| > t) \longrightarrow 0 \ \forall t > 0$. (c.à.d démontrer la CV en Prob de $X_n Y_n$)

Soit $\varepsilon > 0$, on observe $\exists\, \delta > 0$, $P(|X| > \frac{t}{\delta}) \leq \varepsilon$. (Propriété de la v.a ou : $P(|X| > \frac{t}{\delta}) = 1 - P(|X| \leq \frac{t}{\delta}) = 1 - F_{|X|}(t/\delta)$)

Donc $\exists\, n_1$, $P(|X_n| \geq t/\delta) \leq 2\varepsilon$, $\forall n \geq n_1$

D'autre part, $\exists\, n_2$, $P(|Y_n| > \delta) \leq \varepsilon$, $\forall n \geq n_2$

Alors, $P(|X_n Y_n| \geq t) = P(|X_n Y_n| \geq t, Y_n \leq \delta) + P(|X_n Y_n| \geq t, |Y_n| > \delta)$
$$\leq P(|X_n| \geq t/\delta) + P(|Y_n| > \delta) \leq 3\varepsilon, \ \forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$$

Donc, $P(|X_n Y_n| > t) \longrightarrow 0$ ■

(3) Fixons $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$,

Alors, $\exists\, \delta > 0$, $e^{\lambda\delta} - 1 \leq \varepsilon$. (Soit $\lambda > 0$: $\delta \leq \frac{\ln(\varepsilon+1)}{\lambda}$; $\lambda < 0$: $\overbrace{\delta \geq -\frac{\ln(\varepsilon-1)}{|\lambda|}}^{\delta > 0}$; $\lambda = 0$: $\delta \in \mathbb{R}^{+*}$)

$\exists\, n_0$, $P(|Y_n| > \delta) \leq \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$ Est la cv en loi vers Y qui permet de dire ça ?

$$\left|E e^{i\lambda(X_n+Y_n)} - E e^{i\lambda X_n}\right| \leq E\left|e^{i\lambda(X_n+Y_n)} - e^{i\lambda X_n}\right| = E\underbrace{|e^{i\lambda X_n}|}_{\leq 1}|e^{i\lambda Y_n} - 1|$$
$$\leq E|e^{i\lambda Y_n} - 1| = E|e^{i\lambda Y_n} - 1| I_{\{|Y_n| \leq \delta\}} + \underbrace{E|e^{i\lambda Y_n} - 1| I_{\{Y_n > \delta\}}}$$
$$\leq e^{\lambda\delta} - 1 + P(|Y_n| > \delta) \leq 2\varepsilon \text{ lorsque } n \geq n_0 \ ^{(1)}$$

Donc, $\lim_n E e^{i\lambda(X_n+Y_n)} = \lim_n E e^{i\lambda X_n} = E e^{i\lambda X}$

D'où la conclusion par application du Th. de Levy. ■

(Th. de Levy : $X_n \xrightarrow{L} X \iff \varphi_{X_n}(t) \longrightarrow \varphi_X(t) \ \forall t \in \mathbb{R}$).

(1) : $\begin{cases} E\underbrace{|e^{i\lambda Y_n} - 1|}_{\leq 1} I_{\{Y_n > \delta\}} \leq E\, I_{\{|Y_n| > \delta\}} = P(|Y_n| > \delta) \\ \text{A démontrer + généralement } E\, I_A = P(A) \text{ pour } A \in \mathcal{F},\ (\Omega, \mathcal{F}, P) : \\ \quad E\, I_A := \int_\Omega 1_A \, dP = \int_A dP = P(A) \end{cases}$