Soient $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ trois points du plan. Pour $t \in [0,1]$, on pose :

$$\begin{aligned} M(t) &= (1-t)((1-t)A + tC) + t((1-t)C + tB) \\ &= (1-t)^2 A + 2t(1-t)C + t^2 B. \end{aligned}$$

Cela définit une courbe de Bézier d'extrémités A et B et de point de controle C. Soit $t_E, t_F \in [0,1]$ on pose :

$$E = M(t_E) \text{ et } F = M(t_F).$$

On suppose par exemple que $t_E \leq t_f$. Cela définit une corde de la courbe de Bézier. On cherche le point de controle G tel que l'arc de la courbe de Bézier d'extrémités E et F soit une courbe de Bézier avec point de controle G. Autrement dit, pour $t \in [t_E, t_F]$, il doit exister $s \in [0,1]$ tel que :

$$M(t) = (1-s)^2 E + 2s(1-s)G + s^2 F,$$

et réciproquement, pour tout $s \in [0,1]$, il doit exister $t \in [t_E, t_F]$ vérifiant l'égalité précédente. Si E et F sont confondus la solution est triviale : $E = F = G$. Sinon, la bijection la plus simple entre $[0,1]$ et $[t_E, t_F]$ est donnée par :

$$s = \frac{t - t_E}{t_F - t_E} = f(t).$$

En supposant que le problème admette une solution qui est élégante c'est certainement avec cette correpondance entre s et t. Si on note :

$$t_0 = \frac{t_E + t_F}{2},$$

on a :

$$s_0 = f(t_0) = \frac{1}{2},$$

et on doit avoir :

$$M(t_0) = (1-s_0)^2 E + 2s_0(1-s_0)G + s_0^2 F.$$

Ceci permet de trouver G :

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2s_0(1-s_0)}(M(t_0) - (1-s_0)^2 E - s_0^2 F) \\ &= \frac{1}{2s_0(1-s_0)}((1-t_0)^2 - (1-s_0)^2(1-t_E)^2 - s_0^2(1-t_F)^2)A \\ &+ \frac{1}{2s_0(1-s_0)}(2t_0(1-t_0) - (1-s_0)^2 2t_E(1-t_E) - s_0^2 2t_F(1-t_F))C \\ &+ \frac{1}{2s_0(1-s_0)}(t_0^2 - (1-s_0)^2 t_E^2 - s_0^2 t_F^2)B \\ &= (1-t_E)(1-t_F)A + (t_E + t_F - 2t_E t_F)\, C + t_E t_F B. \end{aligned}$$

Il suffit alors de vérifier (en priant pour que ça marche), que pour $t \in [0,1]$ on a :

$$(1-f(t))^2E + 2f(t)(1-f(t))G + f(t)^2F = (1-t)^2A + 2t(1-t)C + t^2B.$$

Là il faut se remonter un peu les manches :

$$\begin{aligned}(1-f(t))^2E + 2f(t)(1-f(t))G + f(t)^2F = &\frac{(t_F-t)^2}{(t_F-t_E)^2}E \\ &+ 2\frac{(t_F-t)(t-t_E)}{(t_F-t_E)^2}G \\ &+ \frac{(t-t_E)^2}{(t_F-t_E)^2}F.\end{aligned}$$

Il faut donc vérifier que (et en fait il suffit de vérifier que) :

$$t^2 = \frac{(t_F-t)^2}{(t_F-t_E)^2}t_E^2 + 2\frac{(t_F-t)(t-t_E)}{(t_F-t_E)^2}t_Et_F + \frac{(t-t_E)^2}{(t_F-t_E)^2}t_F^2.$$

C'est facile à voir en développant les numérateurs. Ensuite en remplacant t, t_E et t_F par $1-t$, $1-t_E$ et $1-t_F$ respectivement on trouve :

$$(1-t)^2 = \frac{(t_F-t)^2}{(t_F-t_E)^2}(1-t_E)^2 + 2\frac{(t_F-t)(t-t_E)}{(t_F-t_E)^2}(1-t_E)(1-t_F) + \frac{(t-t_E)^2}{(t_F-t_E)^2}(1-t_F)^2.$$

Pour conclure il suffit de remarquer que :

$$2t(1-t) = 1-(1-t)^2-t^2,$$

$$\begin{aligned}2t_E(1-t_E) &= 1-(1-t_E)^2-t_E^2,\\ 2t_F(1-t_F) &= 1-(1-t_F)^2-t_F^2,\\ (t_E+t_F-2t_Et_F) &= 1-(1-t_E)(1-t_F)-t_Et_F.\end{aligned}$$

Voilà, j'ai pas détaillé tous les calculs mais normalement avec un papier et un crayon on y arrive.