Approximation de l'équation de la chaleur 1D

Kurasso

Automne 2009

Introduction

Le problème est de trouver u telle que

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \partial_t u - \mathrm{D}\partial_x^2 u = 0 \text{ dans }]0,1[\\ u(0,.) = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 20 \quad t > 0 \text{ (Dirichlet)} \end{cases}$$

On prendra $D = 1,1.10^{-4}$ la diffusivité thermique du cuivre.

1 Schéma

1.1 Maillage

On discrétise selon un pas uniforme le segment $[0,1]$

1.2 Equation générique

On choisit le schéma d'Euler implicite inconditionnellement stable :

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\delta t} - \mathrm{D}\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\delta x} = 0$$

avec $\delta x = 1/N$ et δt le pas de temps.

1.3 Système à résoudre

On obtient une matrice tridiagonale de taille $N-1$ car la solution est connue aux bords.

$$
\begin{pmatrix}
\ddots & & & & \\
& \ddots & & & \\
& -\mathrm{D}\frac{\delta t}{\delta x^2} & 1+2\mathrm{D}\frac{\delta t}{\delta x^2} & -\mathrm{D}\frac{\delta t}{\delta x^2} & \\
& & & \ddots & \\
& & & & \ddots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_1^n \\ \vdots \\ u_i^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
u_1^{n-1} + 20\mathrm{D}\frac{\delta t}{\delta x^2} \\
u_2^{n-1} \\
\vdots \\
u_i^{n-1} \\
\vdots \\
u_{N-2}^{n-1} \\
u_{N-1}^{n-1} + 20\mathrm{D}\frac{\delta t}{\delta x^2}
\end{pmatrix}
$$